BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

GIUSEPPINA POATO

Stella di ennuplo ortogonali in una varietà V_n a metrica qualunque

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (1926), n.3, p. 125–127.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_3_125_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1926.

Stella di ennuple ortogonali in una varietà V_n a metrica qualunque.

Nota di GIUSEPPINA POATO (Padova)

Il compianto prof. RICCI-CURBASTRO studiando i fasci di congruenze in una V_2 ha dimostrato (¹) che, se $\lambda_1^{(1)}\lambda_1^{(2)}$ sono i parametri di direzione di una congruenza Λ_1 di un fascio F e se $\lambda_{1/1}\,\lambda_{1/2}$ è il sistema covariante reciproco del controvariante $\lambda_1^{(1)}\lambda_1^{(2)}$ rispetto alla forma quadratica

$$(1) \qquad \varphi = \sum_{1}^{2}{}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

che dà il quadrato dell'elemento lineare della varietà e se $\lambda_2^{(1)}\lambda_2^{(2)}$ sono i parametri di direzione della congruenza Λ_2 ad essa ortogonale, il sistema covariante di elementi

$$\varphi_r = \sum_{1}^{2}{}_s\, \lambda_1^{(s)}\, \lambda_{2/rs}$$

dove $\lambda_{2/rs}$ indica la derivata covariante di $\lambda_{2/r}$ rispetto ad x_s secondo la forma (1), non varia variando la congruenza di F, purchè le direzioni positive di Λ_2 si intendano ottenute da quelle di Λ_1 con una rotazione di 90° sempre nello stesso senso. Inversamente le φ_r cambiano di segno.

Che cosa si può avere di analogo in una varietà ad n dimensioni con $n > 2$? Io trovo una risposta a questa domanda introducendo la nozione di *stella di ennuple ortogonali* e dimostrando che coi parametri di direzione delle congruenze di un'ennupla della stella si può costruire una forma quadratica che non varia variando l'ennupla nella stella considerata.

1. *Definizione*. Chiamo *stella di ennuple ortogonali* in una varietà V_n l'insieme di tutte le ennuple di congruenze ortogonali di V_n $(n \geq 2)$ le cui congruenze formano con quella di una ennupla ortogonale fissa angoli costanti.

Naturalmente allora se Σ è una stella di ennuple, le congruenze di due ennuple di Σ formano fra loro angoli costanti, o in altri termini, se $\lambda_i^{(r)}$, $\mu_i^{(r)}$ sono i parametri di direzione delle

(¹) Vedi: RICCI et LEVI-CIVITA: *Méthodes de Calcul différentiel absolu*. Mathematische Annalen. Tome 54, p. 166.

congruenze di due ennuple di Σ, l'indice inferiore indicando le diverse congruenze, e se

$$(2)\qquad \varphi = \sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, dx_r\, dx_s$$

è il quadrato dell' elemento lineare di V_n, le

$$(3)\qquad \alpha_{ji} = \sum_1^n {}_r\, \lambda_{i/r}\, \mu_j^{(r)} = \sum_1^n {}_r\, \lambda_i^{(r)}\, \mu_{j/r},$$

cioè i coseni degli angoli formati dalle congruenze delle due ennuple considerate, sono *costanti.*

Dalle (3) si ha

$$(3')\qquad \mu_j^{(r)} = \sum_1^n {}_i\, \alpha_{ji}\, \lambda_i^{(r)}$$

ed anche

$$(3'')\qquad \mu_{j/r} = \sum_1^n {}_i\, \alpha_{ji}\, \lambda_{i/r}.$$

È noto inoltre che

$$(4)\qquad \sum_1^n {}_{rs}\, a_{rs}\, \lambda_i^{(r)}\, \lambda_j^{(s)} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}.$$

2. Indicando con $\lambda_{i/rs}$ il derivato covariante secondo la (2 del reciproco di $\lambda_i^{(r)}$, i sistemi

$$\varphi_{ij/s} = \sum_1^n {}_r\, \lambda_{i/rs}\, \lambda_j^{(r)}$$

sono n^3 covarianti semplici. Fra essi passano delle relazioni infatti derivando le (4) secondo la (2) si trova

$$\sum_1^n {}_r\, \lambda_{i/rs}\, \lambda_j^{(r)} + \sum_1^n {}_r\, \lambda_{j/rs}\, \lambda_i^{(r)} = 0$$

ossia

$$\varphi_{ij/s} + \varphi_{ji/s} = 0$$

ed in particolare

$$\varphi_{ii/s} = 0.$$

3. Analogamente, posto

$$\psi_{ij/s} = \sum_1^n {}_r\, \mu_{i/rs}\, \mu_j^{(r)},$$

si ha

$$\psi_{ij/s} + \psi_{ji/s} = 0$$

ed in particolare

$$\psi_{ii/s} = 0.$$

4. Ora per le (3″) si ha

$$\mu_{i|rs} = \sum_1^n {}_h \alpha_{ih} \lambda_{h|rs}$$

e quindi

$$\psi_{ij|s} = \sum_1^n {}_{hkr} \alpha_{ih} \alpha_{jk} \lambda_{h|rs} \lambda_k^{(r)}$$
$$= \sum_1^n {}_{hk} \alpha_{ih} \alpha_{jk} \varphi_{hk|s}.$$

Di qui si ha

$$\sum_1^n {}_{ij} \psi_{ij|r} \psi_{ij|s} = \sum_1^n {}_{ijhkpq} \alpha_{ih} \alpha_{jk} \alpha_{ip} \alpha_{jq} \varphi_{hk|s} \varphi_{pq|r}$$
$$= \sum_1^n {}_{hkpq} \varphi_{hk|s} \varphi_{pq|r} \sum_1^n {}_i \alpha_{ih} \alpha_{ip} \sum_1^n {}_j \alpha_j \alpha_{jq}$$
$$= \sum_1^n {}_{hk} \varphi_{hk|r} \varphi_{hk|s},$$

perchè

$$\sum_1^n {}_i \alpha_{ih} \alpha_{ip} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad h = p \\ 0 & \text{se} \quad h \neq p \end{cases} \qquad \sum_1^n {}_l \alpha_{jk} \alpha_{jq} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad k = q \\ 0 & \text{se} \quad k \neq q. \end{cases}$$

5. Posto

$$b_{rs} = \sum_1^n {}_{hk} \varphi_{hk|r} \varphi_{hk|s},$$

si vede che la forma quadratica

$$\psi = \sum_1^n {}_{rs} b_{rs} \, dx_r \, dx_s$$

non cambia se si passa da un' ennupla ad un' altra della stella di ennuple ortogonali.

6. Nel caso $n = 2$ si ha

$$b_{rs} = 2\varphi_{12|r} \varphi_{12|s}$$

e la forma ψ diventa

$$2(\varphi_{12|1} \, dx_1 + \varphi_{12|2} \, dx_2)^2 ;$$

e il nostro risultato porta che il sistema $\varphi_{12|r}$ non cambia cambiando la coppia di congruenze ortogonali scelta nella stella [1]. Il sistema $\varphi_{12|r}$ non è altro che il sistema considerato dal Ricci, che ho indicato nella prefazione con φ_r relativo al fascio di congruenze determinato dalla congruenza di parametri $\lambda_1^{(1)} \lambda_1^{(2)}$ che gli appartiene.

(1) Potrebbe cambiare di segno, ma ciò si ovvia cambiando la direzione positiva di una delle due congruenze.