Bollettino Unione Matematica Italiana

Renato Caccioppoli

Sopra i funzionali distributivi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (1926), n.3, p. 128–130.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_3_128_0>

Sopra i funzionali distributivi.

Nota di Renato Caccioppoli

È noto che una funzione $f(x)$ soddisfacente l'equazione fu zionale:

$$f(x+y)=f(x)+f(y),$$

e limitata in un intervallo qualsiasi, è necessariamente contin (e quindi della forma cx, con c costante).

Vogliamo qui stabilire un risultato analogo, e più general relativo ai funzionali che verificano la condizione:

$$A|[f+\varphi]|=A|[f]|+A|[\varphi]|. \tag{1}$$

Dimostreremo cioè che: *Se un funzionale* A|[f]| *gode del proprietà* (1), *e non è continuo, esso è necessariamente non limita nell'intorno di qualsiasi funzione dell'insieme in cui è definit* dippiù, mostreremo che: *In tale intorno esso acquista valori pro simi quanto si voglia a qualsiasi valore finito.*

Per i funzionali *distributivi*, cioè per quelli che verifican oltre la (1), l'altra condizione:

$$A|[cf]|=cA|[f]|, \tag{2}$$

è evidente che la limitazione trae seco la continuità.

Noi quindi prenderemo in considerazione i funzionali cl godono della sola proprietà (1).

Sia A un tale funzionale, definito nell'insieme delle fu zioni $f(x)$ continue in un intervallo (a, b), o, più generalmen nell'insieme delle funzioni di r variabili continue in un insie chiuso.

Se A è discontinuo per una certa funzione f, potremo c struire una successione:

$$f_1,\ f_2,\ f_3,\dots$$

tendente uniformemente ad f, e tale che sia sempre:

$$|A|[f]|-A|[f_n]||=|A|[f-f_n]||>k,$$

essendo k un numero positivo opportunamente piccolo.

Posto:

$$f - f_n = \varphi_n,$$

le funzioni φ costituiranno una successione convergente uniformemente a zero; dippiù, possiamo supporre:

$$|\varphi_1| < \frac{\sigma}{2}, \quad |\varphi_2| < \frac{\sigma}{4}, \ldots \quad |\varphi_n| < \frac{\sigma}{2^n}, \ldots$$

essendo σ una quantità positiva piccola a piacere.

Consideriamo la serie:

$$\sum_1^\infty (-1)^n \, |A|[\varphi_n]||,$$

i cui termini sono tutti in valore assoluto superiori a k; essi potranno ordinarsi in modo da rendere la serie stessa convergente verso un valore α arbitrariamente prefissato.

Dato quindi un numero positivo ε piccolo a piacere, potremo trovare m valori $n_1, n_2, \ldots n_m$ dell'indice n, tali che si abbia:

$$\left| \sum_{i=1}^m (-1)^{n_i} |A|[\varphi_n]|| - \alpha \right| < \varepsilon.$$

Ora, per essere, come abbiamo supposto, $|\varphi_n| < \frac{\sigma}{2^n}$, la serie:

$$\sum_1^\infty |\varphi_n|,$$

converge, ed ha somma costantemente minore di σ.

Posto quindi:

$$\varphi = \sum_{i=1}^m (-1)^{n_i} \operatorname{sgn}(A|[\varphi_{n_i}]|) \varphi_{n_i},$$

sarà contemporaneamente:

$$|A|[\varphi]| - \alpha| < \varepsilon, \quad \max|\varphi| < \sigma.$$

Resta così dimostrato che si può costruire una funzione che sia sempre in valore assoluto minore di un numero positivo σ comunque fissato, ed a cui corrisponda un valore di A prossimo quanto si voglia ad un numero arbitrario α; e che pertanto, più generalmente, in un intorno quanto si voglia ristretto di una qualunque funzione continua f può costruirsi una funzione cui corrisponda un valore di A contenuto in un intervallo comunque prefissato.

Altrettanto può dirsi per un funzionale definito, anzichè nell'insieme di tutte le funzioni continue in (a, b), soltanto in un particolare insieme *lineare* di tali funzioni, cioè in un insieme dotato della proprietà di contenere tutte le funzioni del tipo $c_1 f_1 + c_2 f_2$ (con c_1 e c_2 costanti), ove contenga le funzioni f_1 ed f_2; o pure più generalmente ancora, in un insieme dotato della sola proprietà di contenere, con le funzioni f_1 ed f_2, le altre $f_1 + f_2$ ed $f_1 - f_2$, purchè, beninteso, tale insieme contenga funzioni infinitesime.

In particolare, risulta che *una funzione soddisfacente la condizione:*

$$f(x + y) = f(x) + f(y),$$

ed astretta soltanto ad assumere in un intervallo comunque scelto valori esterni ad un intervallo anch'esso comunque scelto, è necessariamente continua.

Napoli, 16 marzo 1926.