UMI

Sunti di lavori italiani

* Lavori di: L. Tonelli, G. Sansone, Enea Bortolotti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **5** (1926), n.3, p. 131–136.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_3_131_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1926.

SUNTI DI LAVORI ITALIANI

L. TONELLI: *Sulla quadratura delle superficie*. (Rend. R. Accademia dei Lincei, vol. III, 1926, Note I, II, III).

In queste Note l'A., assunta per definizione di area di una superficie quella proposta dal LEBESGUE, e cioè il minimo limite delle aree delle superficie poliedriche tendenti alla superficie considerata, sviluppa, per le superficie continue ad area finita — dette ***superficie quadrabili*** — date nella forma

$$z = f(x, y), \tag{1}$$

con $f(x, y)$ funzione continua, definita nel quadrato Q di vertici opposti $(0, 0)$ e $(1, 1)$, una teoria perfettamente analoga a quella ben nota delle curve continue rettificabili.

Definisce, innanzi tutto, le funzioni $f(x, y)$ *a variazione limitata* e quelle ***assolutamente continue.*** Dice che la $f(x, y)$ è *a variazione limitata* in Q se: 1°) per quasi tutti i valori di $\bar{x}$ e di $\bar{y}$ in $(0, 1)$, $f(\bar{x}, y)$ e $f(x, \bar{y})$ sono delle funzioni, rispettivamente di y e di x, a variazione limitata in $(0, 1)$; 2°) le variazioni totali di $f(\bar{x}, y)$ e di $f(x, \bar{y})$, in $(0, 1)$, sono delle funzioni integrabili (nel senso del LEBESGUE) rispettivamente di $\bar{x}$ e di $\bar{y}$, in $(0, 1)$. Dice poi che la $f(x, y)$ è *assolutamente continua* in Q se: 1°) per quasi tutti i valori di $\bar{x}$ e di $\bar{y}$ in $(0, 1)$ $f(\bar{x}, y)$ e $f(x, \bar{y})$ sono delle funzioni, rispettivamente di y e di x, assolutamente continue in $(0, 1)$; 2°) le variazioni totali di $f(\bar{x}, y)$ e di $f(x, \bar{y})$ in $(0, 1)$, sono delle funzioni integrabili, rispettivamente di $\bar{x}$ e di $\bar{y}$, in $(0, 1)$.

Ciò premesso, dimostra le seguenti proposizioni:

A) « La condizione necessaria e sufficiente affinchè la superficie (1) sia quadrabile è che la funzione $f(x, y)$ sia a variazione limitata in Q ».

B) « Se la superficie (1) è quadrabile, la sua area S verifica la disuguaglianza

$$S \geq \iint_Q \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy \text{ ».}$$

C) « La condizione necessaria e sufficiente affinchè l'area S della superficie (1), supposta quadrabile, sia data dalla formula

$$S = \iint_Q \sqrt{1 + p^2 + q^2}\, dxdy, \tag{2}$$

è che la funzione $f(x, y)$ sia assolutamente continua in Q ».

Da ciò deriva, in particolare, che, se i numeri derivati, rispetto ad x e y, della $f(x, y)$ sono limitati, o più generalmente se essi sono finiti e integrabili superficialmente in Q, la superficie (1) è quadrabile e la sua area è data dalla formula (2).

Geometria differenziale. *Sulle superficie deformabili al modo di Bonnet.* (Memoria di G. SANSONE, in pubblicazione negli « Annali di Matematica »).

Le superficie a curvatura media costante godono la proprietà che esse possono deformarsi in guisa che le nuove linee di curvatura taglino sotto angolo costante σ arbitrario le antiche (trasformazioni di BONNET). È naturale porsi il problema di determinare tutte le superficie S per le quali vale la precedente trasformazione.

Indicando con $ds^2 = Edu^2 + Gdv^2$ il quadrato dell'elemento lineare della S riferito alle sue linee di curvatura, con r_1 e r_2 i suoi raggi principali di curvatura e con $r'_1 = \theta^{-\frac{1}{2}} r_1$, $r'_2 = \theta^{\frac{1}{2}} r_2$ i raggi principali di curvatura della deformata, per la funzione incognita θ si trova il sistema di RICCATI:

$$\begin{aligned}(\mathrm{tg}^2 \sigma + 1) \frac{\partial \theta}{\partial u} &= a\theta^2 + b\theta - \sqrt{\frac{E}{G}}\, \mathrm{tg}\, \sigma c, \\ (\mathrm{tg}^2 \sigma + 1) \frac{\partial \theta}{\partial v} &= \mathrm{tg}\, \sigma \sqrt{\frac{E}{G}}\, a\theta^2 + b'\theta + c,\end{aligned} \tag{1'}$$

ove a, b, c sono espressioni note di E, G, delle loro derivate parziali prime e della costante σ. Le condizioni di integrabilità del sistema dànno per θ un' equazione di secondo grado

$$A\theta^2 + B\theta + C = 0,$$

con A, B, C funzioni di E, G, delle loro derivate parziali prime e seconde e della costante σ.

L' esame di questa equazione prova che se essa è identica rispetto a σ la superficie S è sviluppabile, se una sola soluzione di essa soddisfa il sistema (1) la superficie deve essere a curvatura totale costante; se in fine entrambe le soluzioni soddisfano il sistema e se la S non è a curvatura totale nulla o costante, la S è a curvatura media costante. Si perviene così al seguente risultato: *Se una superficie* S *si può deformare in guisa*: 1°) *che le sue linee di curvatura restino linee di curvatura*; 2°) *che tre famiglie distinte di tre traiettorie isogonali alle linee di curvatura si possano cangiare e in doppio modo in linee di curvatura sulla deformata di* S: *allora se la* S *non è a curvatura totale nulla o costante, essa è a curvatura media costante, e tutte le famiglie di traiettorie isogonali alle linee di curvatura si possono cangiare, e in doppio modo, in linee di curvatura sulle deformate di* S.

Nel caso di superficie di rotazione basta che la proprietà sia goduta da una famiglia di traiettorie isogonali ai meridiani: si ritrova così un teorema del BIANCHI.

ENEA BORTOLOTTI: *Su di una generalizzazione della teoria delle curve, e sui sistemi coniugati di una V_2 in V_n* (Rendiconti del R. Istituto Lombardo di Scienze e Lettere, vol. 58, p. 413-459).
— — *Parallelismo assoluto e vincolato negli S_3 a curvatura costante, ed estensione alle V_3 qualunque.* (Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, anno 1924-25, t. 84, parte 2ª, p. 821-858).

In questi due lavori, pur dedicati ad argomenti assai diversi, utilizzo uno stesso procedimento, basato sulla considerazione delle serie $\infty^1(\Sigma)$ di direzioni che escono dai punti di una curva (1). Lo studio di questi enti geometrici Σ in V_n è una generalizzazione della teoria delle curve, e si svolge in modo analogo a questa: in particolare si estendono alle Σ le nozioni relative all' n-edro principale, alle curvature, e le formule di FRÉNET. Ora

(1) Vedi anche la nota: *Su alcune questioni di Geometria delle superficie*, pubblicata in questo Bollettino, anno IV, 1925, p. 162-166 e 193-195.

si comprende, da una parte, come lo studio di un doppio sistema di linee su di una superficie possa ricondursi, almeno per quanto riguarda il comportamento mutuo delle linee dei due sistemi, a quello delle serie di direzioni delle linee d'un sistema che escono dai punti di una linea dell'altro: è questa la via che ho seguita, nel 1° lavoro, per lo studio dei ***sistemi coniugati***, e di alcune loro generalizzazioni. E d'altra parte, viene naturale l'usufruire dei risultati relativi alle Σ per ricercare che cosa caratterizza, ad es., le serie di direzioni *parallele* nel senso di CLIFFORD o di LOBACEFSKI, negli S_3 a curvatura costante. Ciò appunto ho fatto nel secondo lavoro, valendomi poi dei risultati ottenuti per dare un'estensione di quei parallelismi alle V_3 qualunque.

Rammenterò qui alcuni dei risultati ottenuti nei due lavori.

Nel primo estendo alle Σ in V_n, e poi in particolare alle Σ di una V_2 in V_3, varie proposizioni della teoria delle curve: ad es. le formule di EULERO, di MEUSNIER e di O. BONNET. Mostro come si possano caratterizzare i doppi sistemi coniugati di una V_2 in V_n mediante proprietà analoghe a quelle delle linee asintotiche, (ad es., le (1^e) normali principali associate alla Σ formata dalle direzioni delle linee d'un sistema che escono dai punti d'una linea dall'altro sono tangenti alla superficie), ed estendo ad essi il teorema di BELTRAMI-ENNEPER [1]. Dò, per le V_2 in V_n, una generalizzazione della nota rappresentazione delle curvature normali (mediante la conica delle curvature), infine, introduco e studio brevemente dei doppi sistemi ∞^1 di linee che esistono su di una *qualunque* V_2 in V_n, e sono naturali estensioni degli usuali sistemi coniugati: i ***sistemi coniugati rispetto a una serie*** (ζ_h) di ***normali***, associate ai punti della superficie, e i sistemi *quasi-coniugati*. I primi sistemi sono dati dall'equazione $\sum \overset{h}{\omega}_{rs}\, dx_r\, \delta x_s = 0$, ove $\overset{h}{\omega}_{rs}$ sono i coefficienti della 2^a forma fondamentale (del 2° grado) della V_2 in V_n, relativa alle normali (ζ_h): dei risultati ottenuti mediante questa prima generalizzazione ricorderò soltanto una semplice caratterizzazione delle superficie ad area minima in una V_n qualunque: ***esse sono le superficie sulle quali le asintotiche relative a un qualunque sistema*** (ζ_h) ***di normali formano un doppio sistema ortogonale.*** I sistemi quasi-coniugati (tali che per la serie delle direzioni delle linee di *uno* dei due sistemi che escono dai punti delle linee dell'altro, le $(n-1)^{me}$ normali prin-

(1) Vedi l'enunciato di questo teorema generalizzato (pel caso delle V_2 in V_3) nella notizia che ho già dato (nel vol. IV di questo Bollettino) di una nota pubblicata nei C. R., e dedicata appunto a questo teorema.

cipali associate siano normali alla superficie), sono una naturale estensione delle linee *quasi-asintotiche* del BOMPIANI, e godono di proprietà analoghe.

Nel secondo lavoro mostro che i parallelismi assoluti di CLIFFORD e di LOBACEFSKI in un S_3 (V_3 a curvatura costante) possono caratterizzarsi, in relazione col parallelismo vincolato di LEVI-CIVITA, mediante le seguenti equazioni:

$$\frac{\delta\xi}{\delta s} = \pm\sqrt{K}\lambda\wedge\xi \quad \text{e} \quad \frac{\delta\xi}{\delta s} = \mp\sqrt{-K}(\xi\wedge\lambda)\wedge\xi$$

rispettivamente: ove ξ, λ sono i vettori unitari che individuano la direzione trasportata e la direzione di trasporto, δ è il simbolo di differenziazione covariante in S_3, δs è l'elemento lineare della linea di trasporto, K è la curvatura riemanniana (costante) dello spazio S_3. Il doppio segno distingue le due specie di parallelismo di CLIFFORD, o di LOBACEFSKI.

In altre parole: una serie Σ_ξ di direzioni parallele nel senso di CLIFFORD è caratterizzata dall'avere per (1ª) *direzione associata* (in ciascun punto della linea di trasporto) la normale comune alla normale di trasporto (ξ) e alla direzione trasportata (λ), e per (1ª) *curvatura associata* $\sqrt{K}\,\mathrm{sen}\,\widehat{\lambda\xi}$; una serie di direzioni parallele nel senso di LOBACEFSKI, dall'avere per direzione associata, la normale a (ξ) che giace nella faccetta (ξ, λ) e per curvatura associata, $\sqrt{-K}\,\mathrm{sen}\,\widehat{\lambda\xi}$.

Ciò stabilito, io mi valgo delle formule sopra ricordate (mutando soltanto K in $K_{\xi\lambda}$, curvatura riemanniana di V_3 nell'orientazione (λ, ξ)), per definire dei trasporti per parallelismo in una V_3 qualunque che chiamo *parallelismo ellittico*, ed *iperbolico*, di 1ª o di 2ª specie); i quali dunque si riducono quelli di CLIFFORD, e di LOBACEFSKI, se la V_3 sia curvatura costante, e *soltanto allora* dànno luogo a una parallela che non dipende dalla linea di trasporto. Anche per questi trasporti si ha l'autoparallelismo delle geodetiche: nel caso del trasporto ellittico, si ha conservazione dell'angolo d'inclinazione della direzione trasportata su di una linea di trasporto geodetica; nel caso del trasporto iperbolico, si ha permanenza della direzione trasportata lungo una geodetica sulla superficie geodetica iniziale.

Pel parallelismo ellittico vale una proprietà caratteristica molto semplice: siano P, Q due punti successivi di una qualunque curva in V_3, e PP', QQ' due archi infinitesimi *eguali* presi sulle geodetiche di V_3 che escono dai due punti ora detti secondo le direzioni di una serie Σ_ξ generica associata ai punti di l': la differenza $\overline{PQ^2} - \overline{P'Q'^2}$, che in generale è infinitesima del 3° ordine (complessivamente) rispetto a PP', PQ come infinitesimi del 1° ordine, è del 4° ordine se Σ_ξ è formata da parallele lungo l' nel senso di LEVI-CIVITA, *è di ordine* > 4 *allora e allora soltanto che* Σ_ξ *è formata da parallele lungo* l' *nel senso ellittico* (1).

Ricorderò infine che del parallelismo ellittico ho dato alcune applicazioni alla teoria delle curve e delle superficie in V_3: ottenendo ad es. una nuova generalizzazione del teorema di BELTRAMI-ENNEPER, e semplici estensioni di note proprietà delle eliche e delle superficie a curvatura nulla in S_3.

(1) Anche se $PP'Q'Q$ è un quadrilatero formato da due geodetiche PP', PQ e due linee d'equidistanza geodetica (SEVERI: *Sulla curvatura delle superficie a varietà*. — Rend. del Circ. Matem. di Palermo, t. 42, 1917, p. 227-259 — p. 250), la differenza $\overline{PQ^2} - \overline{P'Q'^2}$ è infinitesima del 5° ordine, ma allora anche $\overline{PP'^2} - \overline{QQ'^2}$ è infinitesima dello stesso ordine, mentre nel nostro caso, è *identicamente nulla*.