
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Sunti di lavori esteri

* Lavori di: H. Bohr, G. Bouligand, L. Walsch, I. Priwaloff, H. Lebesgue, N. Lusin, M. Soula, R. Nevanlinna, Th. Varopoulos, M. Mandelbrojt, N. Wiener, G. Bouligand, A. Angelesco, A. Bloch, E. Picard, F. Carlson, P. Nouillon, G. J. Rémoundos, A. Bloch

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 5 (1926), n.3, p. 137–146.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_3_137_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1926.

SUNTI DI LAVORI ESTERI

H. BOHR: *Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen*, III. (Acta Mathem., T. 47).

La terza Memoria del ciclo: *Sulla teoria delle funzioni quasi-periodiche*, sulla quale riferisco in ciò che segue, dietro cortese invito del Presidente dell'U. M. I., tratta delle funzioni di una variabile complessa, e porta il sottotitolo: *Sviluppi di Dirichlet di funzioni analitiche*.

1. Sia $z = re^{i\theta}$ una variabile complessa. Consideriamo le infinite potenze ad esponente continuo $z^\lambda = r^\lambda e^{i\lambda\theta}$, dove λ percorre tutti i valori reali da $-\infty$ a $+\infty$, e precisamente le consideriamo sulla superficie di RIEMANN ad infiniti fogli $L: 0 < r < \infty, -\infty < \theta < \infty$, cioè sulla riemanniana del logaritmo coi due punti di diramazione di ordine infinito $z = \theta$ e $z = \infty$. La questione che la Memoria si propone può enunciarsi così:

In che guisa deve comportarsi una funzione analitica $f(z)$ in un anello circolare ad infiniti fogli $r_1 < r < r_2, -\infty < \theta < \infty$ della superficie L , per essere costituita per via additiva da una infinità numerabile di potenze z^{λ_n} , cioè per ammettere una rappresentazione, avente significato, della forma

$$\sum a_n z^{\lambda_n} ?$$

Presenta uno speciale interesse il caso $r_1 = 0$ (o il caso corrispondente $r_2 = \infty$) in cui la questione si riconduce a cercare quale andamento della funzione in un punto di diramazione logaritmico dia luogo alla espressione della funzione mediante una serie di potenze « irregolare » $\sum a_n z^{\lambda_n}$.

È comodo, per riattaccarsi nel modo più diretto possibile alla teoria delle funzioni quasi-periodiche sviluppata nelle Memorie I e II ⁽¹⁾ per le funzioni di una variabile reale, di passare dalla riemanniana L al piano semplice della variabile $s = \sigma + it$ per

(1) V. Bollettino dell'U. M. I., T. III, p. 220 e T. IV, p. 216.

mezzo della ovvia trasformazione $z = e^s$. La nostra questione si enuncia con ciò:

Quali funzioni analitiche $f(s)$ regolari in una striscia $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$ si possono sviluppare in una serie della forma

$$\sum a_n e^{\lambda_n s}$$

cioè in una serie di Dirichlet?

Il caso menzionato più sopra $r_1 = 0$ (risp. $r_2 = \infty$) corrisponde ora al caso $\sigma_1 = -\infty$ (risp. $\sigma_2 = +\infty$), in cui la striscia si riduce rispettivamente all'intero semipiano sinistro o destro.

Rileviamo che il nostro concetto di « serie di DIRICHLET » differisce dall'usuale a due punti di vista essenziali. Dapprima, non partiamo da una serie arbitrariamente data, ma ammettiamo invece soltanto quelle serie che vengono generate da una funzione; in secondo luogo, gli esponenti λ_n non sono soggetti per noi ad alcuna condizione (essi possono, ad esempio, essere densi su tutto l'asse λ) mentre di solito si considerano solo quelle successioni di esponenti che non hanno punti limiti a distanza finita. Questo ultimo punto è di significato decisivo per l'intera teoria: è solo mediante l'abbandono di ogni limitazione per la successione degli esponenti che nasce la possibilità di dare il carattere della classe di funzioni sviluppabili in serie di DIRICHLET. E questo carattere sta nella *quasi-periodicità*.

2. La definizione posta a base di questo carattere è la seguente:

Una funzione analitica $f(s)$ regolare in una striscia $\alpha < \sigma < \beta$ ($-\infty \leq \alpha < \beta \leq +\infty$) si dirà « quasi periodica in (α, β) » quando ad ogni ε corrisponde una tale lunghezza $l = l(\varepsilon)$, che ogni intervallo $t_1 < t < t_2$ di lunghezza l sull'asse immaginario contenga almeno un « numero di trasporto » $\tau = \tau(\varepsilon)$ corrispondente ad ε , cioè un numero c tale che per ogni s nella intera striscia $\alpha < \sigma < \beta$ sia verificata la disuguaglianza

$$|f(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon.$$

In altri termini si richiede dalla funzione 1) che essa sia funzione quasi-periodica dell'ordinata t su ogni verticale $\sigma = \sigma_0$ della striscia $\alpha < \sigma < \beta$; 2) che la quasi-periodicità sia uniforme sulle diverse verticali.

Riesce comodo di introdurre, oltre al concetto di « quasi-periodico in (α, β) » anche un concetto di « quasi-periodico in $[\alpha, \beta]$ », intendendo con ciò di indicare semplicemente che $f(s)$ è quasi periodica in ogni striscia parziale $(\alpha + \delta, \beta - \delta)$.

Anche qui, come per le funzioni di una variabile reale, vale il teorema che ogni funzione quasi-periodica in $[x, \beta]$ è anche *limitata* in $[x, \beta]$. Di essenziale significato è ora il seguente teorema, che ne rappresenta in qualche modo una inversione: « Se di una « funzione analitica $f(s)$ regolare in una striscia (α, β) si sa soltanto che essa è quasi-periodica in una singola retta $\sigma = \sigma_0$, della « striscia, ne risulta che è quasi-periodica in tutta la striscia $[\alpha, \beta]$, « purchè sia *limitata* in $[x, \beta]$ ». Questo teorema permette di introdurre il concetto di *massima striscia* di quasi-periodicità di una funzione, vale a dire della più grande striscia $[x^*, \beta^*]$ che contiene la striscia data $[\alpha, \beta]$ di quasi-periodicità, ed in cui $f(s)$ rimane ancora limitata, e di conseguenza quasi-periodica.

Il citato teorema ci dà anche un metodo assai comodo per trasportare direttamente al caso della variabile complessa teoremi già stabiliti per la teoria delle funzioni quasi-periodiche di una variabile reale, senza che sia necessario di riprenderne la dimostrazione. Così, per esempio, si dimostra col suo sussidio che la somma di due funzioni quasi-periodiche in una striscia $[\alpha, \beta]$ è essa pure quasi-periodica in $[x, \beta]$. Ciò perchè $f(s)$ e $g(s)$, e per conseguenza $f(s) + g(s)$ sono limitate in $[x, \beta]$, mentre su una retta $\sigma = \sigma_0$ comunque sceltavi sono quasi-periodiche rispetto a t la $f(\sigma_0 + it)$ e la $g(\sigma_0 + it)$, e per conseguenza anche $f(\sigma_0 + it) + g(\sigma_0 + it)$. Anche la *funzione limite* di una successione uniformemente convergente di funzioni quasi-periodiche è pure quasi-periodica. In particolare quindi ogni serie uniformemente convergente in $[x, \beta]$, della forma

$$\sum a_n e^{\lambda_n s},$$

rappresenta mediante la sua somma una funzione quasi-periodica in $[\alpha, \beta]$.

3. Per giungere allo *sviluppo di Dirichlet*

$$\sum A_n e^{\Lambda_n s}$$

di una funzione quasi-periodica in (α, β) , procediamo come segue. Su ogni retta fissa $\Re(s) = \sigma$ della striscia la $F_\sigma(t) = f(\sigma + it)$ è quasi-periodica in t ed ha quindi una serie di FOURIER

$$F_\sigma(t) \sim \sum A_n^{(\sigma)} e^{i\Lambda_n^{(\sigma)} t}.$$

Ora si può mostrare facilmente, col sussidio del teorema integrale di CAUCHY: 1°) che *gli esponenti* $\Lambda_n^{(\sigma)}$ *sono indipendenti da* σ ; 2°) che i coefficienti $A_n^{(\sigma)}$ dipendono da σ nel modo più « giusto », nel senso che $A_n^{(\sigma)} = A_n e^{\Lambda_n \sigma}$, dove le A_n sono costanti, cioè indipendenti da σ . Le serie di FOURIER, sulla continuità infinita delle

rette $\Re(s) = \sigma$, conducono dunque ad un unico sviluppo, della forma

$$\sum A_n e^{\Lambda_n \sigma} e^{i \Lambda_n t} = \sum A_n e^{\Lambda_n s},$$

e questo sviluppo è quello che noi designiamo come « serie di DIRICHLET » della funzione $f(s)$ nella striscia (α, β) .

Nel caso speciale di una funzione *propriamente periodica* (o, riferendoci nuovamente al piano z , di una funzione nell'anello circolare *semplice* $r_1 < |z| < r_2$) la nostra serie di DIRICHLET si riduce ad una ordinaria *serie di Laurent* della funzione $f(s)$.

Dalla teoria per le variabili reali si deduce immediatamente il *teorema di univocità*, che a due funzioni quasi-periodiche diverse in una striscia comune corrispondono due diversi sviluppi in serie di DIRICHLET, ed il *teorema fondamentale* (o teorema della convergenza in media), che nell'intera striscia vale l'equazione di PARSEVAL

$$M: |f(\sigma + it)|^2 = \sum |A_n|^2 e^{2\Lambda_n \sigma}.$$

Dalle *regole del calcolo* delle operazioni sugli sviluppi in serie segue subito: che lo sviluppo di DIRICHLET di una somma, di un prodotto, di un limite, di un integrale o di una derivata si ottiene mediante la rispettiva operazione formalmente eseguita sulla serie di DIRICHLET della data funzione.

Il *teorema di approssimazione* della Memoria II si può pure estendere facilmente: per esso, condizione *necessaria e sufficiente* perchè una funzione analitica sia quasi-periodica in $[z, \beta]$, è che si possa approssimare uniformemente in $[z, \beta]$ mediante polinomi esponenziali $\sum_1^N a_n e^{\lambda_n s}$.

4. Come nelle ordinarie serie di LAURENT $\sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n$ il caso di soli esponenti positivi (o di soli negativi), cioè il caso di una solita serie di potenze $\sum_0^{\infty} a_n z^n$, ha un'importanza speciale, così per le nostre funzioni quasi-periodiche ha un'importanza speciale il caso in cui tutti gli *esponenti di Dirichlet* Λ_n hanno un medesimo segno. Si giunge così a risultati che hanno un carattere quasi altrettanto circoscritto che nel caso speciale classico delle serie di potenze propriamente dette (solo che nel nostro caso generale non è naturalmente necessario che abbia luogo la ordinaria convergenza).

Col sussidio del teorema di approssimazione e con deduzione dal principio di PHRAGMÉN-LINDELÖF, si dimostra dapprima il seguente teorema fondamentale:

Se una funzione $f(s)$ quasi-periodica in $[x, \beta]$, $f(s) \in \Sigma A_n e^{\Lambda_n s}$, ammette soli esponenti di DIRICHLET positivi, essa è *continuabile analiticamente in tutto il semipiano sinistro* $\sigma \leq \alpha$, e dà in $[-\infty, \beta]$ una funzione quasi-periodica che per $\sigma \rightarrow -\infty$ tende a zero uniformemente rispetto a t .

Se all'ipotesi di esponenti « tutti positivi » si sostituisce quella di esponenti *non negativi*, può aversi un termine costante c nello sviluppo $f(s) \in \Sigma A_n e^{\Lambda_n s}$, e il teorema vale naturalmente nel senso che per $\sigma \rightarrow -\infty$, la $f(s)$ converge a questa costante anziché a zero. D'altra parte, si dimostra facilmente che quando nello sviluppo di DIRICHLET di una funzione $f(s)$ quasi-periodica nel semipiano sinistro $[-\infty, \beta]$ si presenta almeno un esponente negativo Λ_n , $f(s)$ non può rimanere limitata. Quando dunque una funzione quasi-periodica in $[-\infty, \beta]$ rimane limitata, essa deve avere solo esponenti non negativi, e perciò tendere ad un determinato *valore limite*. Da ciò si può dedurre senza difficoltà che per una funzione $f(s)$ quasi-periodica in $[-\infty, \beta]$, coll'avvicinarsi al « punto » all'infinito $\sigma = -\infty$ si possono presentare soltanto le *tre possibilità* che, per i teoremi di WEIERSTRASS, si possono dare per una funzione propriamente periodica; cioè (se ritorniamo al piano z) per una funzione regolare in un intorno di un punto del piano semplice:

A) $f(s)$ tende ad un valore limite finito (caso regolare);

B) $|f(s)|$ tende all'infinito (caso polare);

C) i valori di $f(s)$ sono dovunque densi in ogni semipiano $\sigma < \sigma_0$ (caso singolare essenziale).

Nel caso C) vale anche il *teorema di Picard*, vale a dire $f(s)$ prende in ogni semipiano sinistro tutti i valori, uno al più escluso.

Dall'esame dello sviluppo di DIRICHLET si può poi facilmente riconoscere se si presenta il caso A, B o C e precisamente:

a) Il comportamento regolare corrisponde al caso in cui tutte le Λ_n sono ≥ 0 .

b) Il comportamento polare corrisponde al caso in cui vi sono esponenti negativi, e fra questi uno numericamente *massimo*.

c) Il comportamento singolare essenziale corrisponde al caso in cui vi sono esponenti negativi, ma fra questi *non ve n'è alcuno* (numericamente) *massimo*. A questo caso appartengono così le funzioni i cui esponenti tendono a $-\infty$, come quelle i cui esponenti tendono ad un numero negativo Λ^* come limite inferiore, numero il quale non appartiene esso stesso all'insieme dei Λ_n .

5. Ci rivolgiamo ora alla questione della *separazione di Laurent* di una funzione quasi-periodica arbitrariamente data in una

striscia. Il teorema classico di LAURENT per una funzione analitica data in un anello semplice $r_1 < |z| < r_2$, o, nel nostro modo di esprimerci, per una funzione $f(s)$ propriamente periodica in una striscia $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, dice che $f(s)$ può decomporre in due sommandi propriamente periodici:

$$f(s) = f_1(s) + f_2(s),$$

di cui $f_1(s)$ è analitica nel semipiano sinistro $\sigma < \sigma_2$, $f_2(s)$ nel semipiano destro $\sigma > \sigma_1$, ed $f_1(s)$ ed $f_2(s)$ sono ancora regolari nei « punti » $\sigma = -\infty$ e $\sigma = +\infty$ rispettivamente. In seguito al risultato dato al n.° 4) sulle funzioni quasi-periodiche i cui esponenti hanno tutti il medesimo segno, potrebbe dapprima sembrare che per estendere la separazione di LAURENT ad una funzione $f(s) \propto \sum A_n e^{\Lambda_n s}$ data arbitrariamente in una striscia $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$, non vi sarebbe altro da fare che formare le due serie parziali

$$\sum_{\Lambda_n > 0} A_n e^{\Lambda_n s} \quad \text{e} \quad \sum_{\Lambda_n < 0} A_n e^{\Lambda_n s}$$

con tutti esponenti positivi l'una, tutti esponenti negativi l'altra, che rappresenterebbero le funzioni quasi-periodiche $f_1(s)$ ed $f_2(s)$, la $f_1(s)$ continuabile analiticamente verso sinistra, la $f_2(s)$ verso destra. Ma questo procedimento non è senz'altro ammissibile, poichè non si sa se le due serie parziali $\sum_{\Lambda_n > 0}$ e $\sum_{\Lambda_n < 0}$ sono di per sè

sviluppi di DIRICHLET di funzioni quasi-periodiche. Ed infatti si può mostrare, con esempi opportunamente costruiti, che esistono funzioni quasi-periodiche che non ammettono una separazione di LAURENT. Per fortuna, un lieve mutamento di pensiero permette di rimediare a questo inconveniente. Si può infatti mostrare che quando anche una funzione quasi-periodica $f(s)$ non ammetta essa stessa una separazione di LAURENT, ciò avviene invece per la sua derivata $f'(s)$, e con ciò si ottiene in molti casi quanto sarebbe dato dalla separazione di $f(s)$ stessa. Come l'esempio più essenziale, portiamo quello del teorema esteso di univocità, il quale dice che se $f(s)$ è quasi-periodica in una striscia (α, β) , e $g(s)$ lo è in una striscia (γ, δ) , e lo sviluppo di DIRICHLET di $f(s)$ in (α, β) è formalmente identico con quello di $g(s)$ in (γ, δ) , $f(s)$ e $g(s)$ sono la stessa funzione analitica, anche nel caso in cui le due striscie sono completamente esterne l'una all'altra, come nel caso $\alpha < \beta < \gamma < \delta$; vi è dunque una funzione quasi-periodica nella intera striscia $\alpha < \sigma < \delta$, la quale funzione coincide con $f(s)$ in (α, β) , e con $g(s)$ in (γ, δ) .

(Dall'Autore).

Note sulla Teoria delle Funzioni, comparse nel T. 178 dei « Comptes Rendus de l'Académie des Sciences ».

G. BOULIGAND (T. 178, pag. 55).

Proseguendo le sue ricerche sul problema di DIRICHLET ⁽¹⁾ l'A determina in qual caso il problema ammette una soluzione limitata, ma non soddisfacente alle condizioni ai limiti in certi punti eccezionali.

L. WALSCH (*Ibid.*, pag. 58).

Indica una condizione necessaria e sufficiente perchè si possa costruire una funzione analitica che assuma su un contorno regolare chiuso semplice una successione continua di valori dati.

I. PRIWALOFF (*Ibid.*, pag. 178).

Considera una successione di funzioni analitiche regolari per $|z| < 1$, che danno ciascuna una rappresentazione conforme biunivoca di questo cerchio; mostra che se converge in tutti i punti di un insieme numerabile avente almeno un punto limite nel cerchio essa converge assolutamente in tutto il cerchio $z \leq \rho < 1$.

H. LEBESGUE (*Ibid.*, pag. 349).

Fa seguito alla nota di BOULIGAND ponendo a confronto la condizione di regolarità data da questi e quella data da ZAREMBA ⁽²⁾, ed enuncia una condizione necessaria e sufficiente di regolarità e di impossibilità per il problema di DIRICHLET.

N. LUSIN e I. PRIWALOFF (*Ibid.*, pag. 456).

Dimostrano che facendo la rappresentazione conforme su $|z| < 1$ d'un campo limitato da una curva rettificabile, ad ogni insieme di misura nulla sulla circonferenza corrisponde un insieme di misura nulla sulla curva, ed applicano a dei problemi della teoria delle funzioni.

I. PRIWALOFF (*Ibid.*, pag. 614).

Dimostra la proposizione inversa della precedente, e cioè: ad ogni insieme di punti di misura nulla situato sulla frontiera rettificabile corrisponde sulla circonferenza un insieme di misura nulla e fa delle applicazioni per la formula di CAUCHY.

⁽¹⁾ C. R., T. 176 (1923); B. S. M. F. (1923).

⁽²⁾ *Sur le principe de minimum*, Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie, 1909.

M. SOULA (*Ibid.*, pag. 688).

Ricerca sotto quali condizioni si possono estendere alle serie di DIRICHLET $\sum a_n e^{-\lambda_n}$ le ricerche dei punti singolari delle serie di TAYLOR.

R. NEVANLINNA (*Ibid.*, pag. 867).

Da una formula generale che ha ottenuto precedentemente (1) deduce una serie di proposizioni sulle funzioni meromorfe che generalizzano il teorema di HADAMARD, nella forma precisa data da VALIRON, e quello di HADAMARD-LINDELÖF sulle funzioni intere.

TH. VAROPOULOS (*Ibid.*, pag. 914).

Dà una semplice dimostrazione dei risultati dati da SAXER. Se $g(x)$ è una funzione intera e se non esiste che un numero finito di punti che annullano una delle funzioni $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$ senza annullare le altre due si ha: $g = Pe^Q$, P e Q essendo dei polinomi. Inoltre apporta delle generalizzazioni.

M. MANDELBROJT (*Ibid.*, pag. 985).

Chiama serie $\epsilon(N)$, serie di EISENSTEIN, appartenente al numero intero N , ogni serie $\sum a_n x^n$ di raggio di convergenza uguale ad uno i cui coefficienti essendo razionali divengono interi mediante la sostituzione (x, Nx) , N essendo il più piccolo intero possibile. L'Autore dà un teorema che permette di determinare il limite inferiore dell'intero N corrispondente ad una serie a coefficienti razionali che rappresenta una funzione algebrica.

N. WIENER (*Ibid.*, pag. 1050).

In seguito alla Nota di LEBESGUE (2), sul problema di DIRICHLET, ed alla sua Memoria (3), dà un teorema che fornisce una caratterizzazione completa necessaria e sufficiente dei punti regolari, riattaccando la regolarità o no alla divergenza di una serie e fa delle applicazioni, generalizzando il risultato di LEBESGUE come questi ha fatto la generalizzazione del teorema di ZAREMBA

(1) Ueber die Eigenschaften Analytischer Funktionen in der Umgebung einer singularen stelle oder Linie. (Acta Soc. Fen., t. 50 (1922), pag. 7).

(2) C. R., T. 178, pag. 349.

(3) Certain Problems in Potential Theory, Journal of Math. and Physics of the Massachusetts Institute of Thermology, 1924.

H. LEBESGUE (*Ibid.*, pag. 1053).

Fa, in seguito alla Nota precedente di WIENER, alcune osservazioni storiche relative ai suoi lavori ed a quelli dei matematici WIENER, PHILIPS ecc. sul problema di DIRICHLET.

G. BOULIGAND (*Ibid.*, pag. 1054).

In seguito ai lavori di PHILIPS e WIENER sul problema di DIRICHLET, mostra che si possono ottenere dei nuovi risultati da una semplice ipotesi, che chiama ipotesi C. Si definiscono così dei domini eccezionali che generalizzano notevolmente quelli che hanno spigolo di regresso.

A. ANGELESCO (*Ibid.*, pag. 1509).

Considera l'integrale di POISSON

$$T = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-r^2)f(a+\theta)}{1-2r\cos\theta+r^2} d\theta,$$

a ed r essendo delle quantità complesse, e mediante delle ipotesi sulla funzione $f(a+\theta)$, cerca il limite per $r \rightarrow (1, 0)$ secondo un cammino qualunque situato nel cerchio $|x+iy|=1$.

A. BLOCH (*Ibid.*, pag. 1593).

Appoggiandosi su due proposizioni dovute a VALIRON ⁽¹⁾ e HADAMARD dimostra nuovamente il teorema di PICARD dell'impossibilità di soddisfare ad una relazione algebrica di genere superiore ad uno, mediante delle funzioni uniformi nel dominio d'un punto essenziale isolato comune.

E. PICARD (*Ibid.*, pag. 1645).

In seguito alla Nota di BLOCH ⁽²⁾ stabilisce la proposizione seguente: se per una funzione intera $G(z)$ esistono due funzioni razionali distinte $P(z)$ e $Q(z)$ tali che le due equazioni $G(z)=P(z)$ e $G(z)=Q(z)$ non abbiano che un numero limitato di radici. $G(z)$ è un polinomio.

F. CARLSON (*Ibid.*, pag. 1677).

Considera la serie $f(x) = \sum_1^{\infty} a_n x^n$ il cui cerchio di convergenza è finito, pone $P_n(x) = \sum_1^n a_n x^n$, e con P_{n_i} una successione infinita

⁽¹⁾ *Lectures on the general theory of integral functions*. Toulouse, 1925.

⁽²⁾ C. R., T. 178, pag. 1593.

contenuta in P_n , e studia la distribuzione degli zero dei polinomi P_{n_i} nelle vicinanze del cerchio di convergenza. Considera per semplicità gli sviluppi secondo i polinomi di FABER.

P. NOUILLON (*Ibid.*, pag. 1780).

Mostra che le funzioni intere di genere 0 ed 1 soddisfano ad una equazione integrale, ove il campo d'integrazione è esteso a tutto il piano.

M. MANDELBROJT (*Ibid.*, pag. 1873).

Se $\sum a_n x^n$ è una serie che ha per raggio di convergenza l'unità e prolungabile al di là del cerchio di convergenza, dimostra che annullando una infinità qualunque di coefficienti a_{n_i} soddisfacenti alla condizione $\overline{\lim} \sqrt[n_i]{a_{n_i}} = 1$ si ottiene una serie che ammette almeno due punti singolari in tutto il piano.

E fa delle osservazioni sulle serie di TAYLOR che presentano delle lacune; se le lacune sono maggiori o più frequenti le singolarità della funzione sono più complicate o per la loro natura o per il loro numero.

G. J. RÉMOUNDOS (*Ibid.*, pagg. 1952, 2049).

Nella prima Nota enuncia due teoremi che completano due proposizioni enunciate anteriormente da PICARD ⁽¹⁾ e da lui stesso ⁽²⁾, sulle coppie di funzioni meromorfe legate algebricamente.

Nella seconda Nota applica alle successioni canoniche, enunciando dei teoremi che offrono una grande analogia con quelli di STIETJES, LANDAU, VITALI, MONTEL.

A. BLOCH (*Ibid.*, pag. 2051).

Completa alcuni risultati precedenti: al cerchio $|z| < 1$ la funzione $f(z) = z + \dots$, olomorfa per $|z| < 1$, annullantesi nell'origine ed avente una derivata uguale ad uno, fa corrispondere un dominio riemanniano comprendente un cerchio ad un foglio di raggio almeno uguale ad un certo numero δ costante assoluta; da questo teorema deduce delle conseguenze per la teoria della uniformizzazione delle funzioni algebriche. g. b.

⁽¹⁾ Rend. Circ. Palermo, t. 33, 1912, pag. 254.

⁽²⁾ C. R., T. 172, 1921, pag. 645.