Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Giuliio Andreoli

Sul teorema dello Jacobiano

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (1926), n.4, p. 161–164.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_4_161_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1926.

PICCOLE NOTE

Sul teorema dello Jacobiano.

Nota di GIULIO ANDREOLI (a Catania).

1. Ci proponiamo di dare, in questa brevissima Nota, una dimostrazione del ben noto teorema sulla equivalenza fra annullarsi dello Jacobiano ed esistenza di relazioni fra le funzioni che lo formano.

Tale dimostrazione è essenzialmente connessa all'interpretazione dello Jacobiano quale rapporto delle estensioni (lunghezze, o aree, o volumi, ecc.) infinitesime, corrispondentisi in virtù delle relazioni fra le $y_1 \dots y_n$ variabili dipendenti, e le $x_1 \dots x_n$, variabili indipendenti.

La dimostrazione stessa si stacca nettamente dalle abituali in quanto non richiede la preventiva conoscenza della teoria delle funzioni implicite, ma quella dell'integrazione delle forme differenziali lineari e delle condizioni di completa integrabilità.

Svolgeremo completamente la parte algoritmica della dimostrazione per il caso di $n = 3$: la dimostrazione resta invariata — come sarà chiaro — per n qualunque.

Supporremo soddisfatte tutte le condizioni di regolarità occorrenti, tralasciando per il momento la parte critica della dimostrazione stessa.

2. Siano date tre funzioni

$$y_r = y_r(x_1, x_2, x_3) = y_r((x)) \qquad (r = 1, 2, 3)$$

ed il loro Jacobiano $\dfrac{\partial((y))}{\partial((x))} = I$.

Se y_3 risulta funzione di y_1, y_2 è immediato, per note proprietà dei determinanti che $I = 0$.

Supponiamo dunque $I = 0$ e mostriamo che si deve avere $y_3 = \varphi(y_1, y_2)$.

Ricordiamo che dati tre diversi differenziali alle x, in tre direzioni diverse e non complanari, sarà

$$I = \begin{vmatrix} dy_1 & dy_2 & dy_3 \\ \delta y_1 & \delta y_2 & \delta y_3 \\ \Delta y_1 & \Delta y_2 & \Delta y_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ \delta x_1 & \delta x_2 & \delta y_3 \\ \Delta x_1 & \Delta x_2 & \Delta x_3 \end{vmatrix} = \Theta((y)) : \Theta((x)).$$

Se I è identicamente nullo, sarà anche $\Theta((y)) = 0$, poichè essendo d, δ, Δ indipendenti e arbitrari $\Theta((x)) \neq 0$.

Pertanto, se indichiamo con lo stesso simbolo d il differenziale generico in una direzione arbitraria, sarà

$$dy_3 = A_1 dy_1 + A_2 dy_2$$

con le A funzioni delle y.

Ora

$$dy_r = \sum_{s=1}^{3} \frac{\partial y_r}{\partial x_s} dx_s,$$

e quindi

$$dy_3 = \sum_{r=1}^{2} \sum_{s=1}^{3} A_r \frac{\partial y_r}{\partial x_s} dx_s = \sum_{s=1}^{3} \left\{ \sum_{r=1}^{2} A_r \frac{\partial y_r}{\partial x_s} \right\} dx_s.$$

Ma siccome y_3 è funzione di x_1, x_2, x_3, saranno soddisfatte le condizioni di integrabilità di tale ultima forma rispetto alle x, avremo cioè

$$\frac{\partial \sum_r A_r \frac{\partial y_r}{\partial x_s}}{\partial x_t} = \frac{\partial \sum_r A_r \frac{\partial y_r}{\partial x_t}}{\partial x_s} \qquad \begin{matrix} r = 1,\ 2 \\ s,\ t = 1,\ 2,\ 3 \end{matrix}$$

che per $s = t$ sono identicamente soddisfatte.

Queste ultime formule sviluppate dànno

$$\sum_{\rho} \frac{\partial A_r}{\partial y_\rho} \frac{\partial y_\rho}{\partial x_t} \frac{\partial y_r}{\partial x_s} + \sum A_r \frac{\partial^2 y_r}{\partial x_t \partial x_s} = \sum_{r,\rho} \frac{\partial A_r}{\partial y_\rho} \frac{\partial y_\rho}{\partial x_s} \frac{\partial y_r}{\partial x_t} + \sum A_r \frac{\partial^2 y_r}{\partial x_t \partial x_s} \begin{pmatrix} s, t = 1, 2, 3 \\ r, \rho = 1, 2 \end{pmatrix}.$$

3. Osserviamo che i sommatori semplici sono eguali (ammessa l'invertibilità delle derivazioni per le y) e che nei sommatori doppi si può scambiare r con ρ quali indici di sommazione: ricavando così

$$\sum_{r,\rho} \left(\frac{\partial A_r}{\partial y_\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial y_r} \right) \frac{\partial y_r}{\partial x_s} \frac{\partial y_\rho}{\partial x_t} = 0 \quad (s, t = 1, 2, 3;\ r, \rho = 1, 2).$$

Si ha cioè un sistema di 9 equazioni lineari omogeneè nelle quattro incognite

$$p_{r\rho} = \frac{\partial A_r}{\partial y_\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial y_r} \quad \text{con} \quad p_{rr} = 0; \quad p_{r\rho} = - p_{\rho r}.$$

Scelte quattro di queste equazioni, sarà possibile trovare valori non nulli delle p solo se il determinante dei coefficienti è diverso da zero. Se per semplicità supponiamo che il Jacobiano di partenza abbia caratteristica 2 (cioè $3-1$), si può, senza ledere la generalità, supporre che un minore non nullo sia proprio $\frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(x_1, x_2)}$, e con ciò verremmo a considerare le prime quattro equazioni.

Intanto il determinante D delle equazioni ora scritte è quella della matrice

$$\left\| \frac{\partial y_r}{\partial x_s} \frac{\partial y_\rho}{\partial x_t} \right\| \qquad s, t = 1, 2; \; r, \rho = 1, 2.$$

Quindi, per noti teorema d'algebra [1], sarà

$$D = \left[\frac{\partial(y_1 y_2)}{\partial(x_1 x_2)} \right]^4 \neq 0.$$

Pertanto le p non possono che essere identicamente nulle e quindi risulta

$$\frac{\partial A_r}{\partial y_\rho} = \frac{\partial A_\rho}{\partial y_r}$$

il che implica la completa integrabilità anche *rispetto alle y* della $A_1 dy_1 + A_2 dy_2$; cioè

$$dy_3 = A_1 dx_1 + A_2 dy_2 = d\Phi(y_1 y_2)$$

e quindi

$$y_3 = \Phi(y_1 x_2).$$

4. Nel caso generale la dimostrazione è analoga. Si supponga — per semplicità — che lo Jacobiano abbia caratteristica $n-1$ e si ponga, quale conseguenza del suo identico annullarsi

$$dy_n = \sum_{r=1}^{n-1} A_2 dy_2 = \sum_{r=1}^{n-1} \left\{ \sum_{s=1}^{n} A_r \frac{\partial y_r}{\partial x_s} \right\} dx_s$$

qualunque sia d, simbolo di differenziazione generica.

Ricordiamo che y_n è funzione delle x e che quindi rispetto alle x sono soddisfatte le condizioni di completa integrabilità.

Si proceda quindi come per il caso ridotto già studiato, ottenendosi il sistema di n^2 equazioni lineari omogenee ad $(n-1)^2$ incognite

$$\sum_{r,\rho=1}^{n-1} p_{r\rho} \frac{\partial y_r}{\partial x_s} \frac{\partial y_\rho}{\partial x_t} = 0 \qquad s, t = 1 \dots n$$

[1] PASCAL, *Determinanti*. Milano, Hoepli 1924 (Teoremi di Piquet, ecc.).

con

$$p_{r\rho} = \frac{\partial A_r}{\partial y_\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial y_r}; \quad p_{r\rho} = -p_{\rho r}; \quad p_{rr} = 0 \quad (r, \rho = 1 \dots n-1).$$

La matrice dei coefficienti è di n^2 linee, $(n-1)^2$ colonne, data da

$$\left\| \frac{\partial y_2}{\partial x_s} \frac{\partial y_\rho}{\partial x_t} \right\| \quad r, \rho = 1 \dots n-1; \quad s \dots t = 1 \dots n.$$

Fra i minori [1] di ordine massimo, cioè di ordine $(n-1)^2$, si troverà quello corrispondente ad $s, t = 1, \dots, n-1$, il quale per il già citato teorema d'algebra risulterà dato da:

$$D = \left[\frac{\partial(y_1 \dots y_{n-1})}{\partial(x_1 \dots x_{n-1})} \right]^{2(n-1)}$$

e quindi, per l'ipotesi fatta sulla caratteristica di J, risulterà diverso da zero.

Pertanto le $p_{r\rho}$ dovranno essere identicamente zero e quindi

$$\frac{\partial A_r}{\partial y_\rho} = \frac{\partial A_\rho}{\partial y_r}$$

il che implica

$$dy_n = \sum_1^{n-1} A_r dy_r = d\Phi(y_1 \dots y_{n-1})$$

e quindi

$$y_n = \Phi(y_1 \dots y_{n-1}) \qquad \text{c. d. d.}$$

Catania, maggio 1926.

[1] Si osservi che tutti gli altri minori d'ordine $(n-1)^2$ estratti dalla matrice si possono calcolare in base allo stesso teorema d'algebra, e risulteranno la potenza $(n-1)$ del prodotto di due minori dello Jacobiano e cioè la potenza $(n-1)$-sima dello Jacobiano di $n-1$ fra le y rispetto ad $(n-1)$ fra le x, per lo Jacobiano di altre $(n-1)$ delle y rispetto ad $(n-1)$ delle x.