BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

FRANCESCO SBRANA

Sull'integrazione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (1926), n.4, p. 179–180.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_4_179_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1926.

Sull' integrazione delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti.

Nota di FRANCESCO SBRANA (a Genova).

Per integrare l' equazione differenziale

$$(1)\qquad \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = f(x),$$

con $a_1, a_2, \dots, a_n$ costanti, ed $f(x)$ funzione nota, si conosce, oltre al metodo di LAGRANGE, un procedimento dovuto a CAUCHY. Esso consiste nel determinare una funzione, integrale dell' equazione omogenea corrispondente, che per un valore α di x si annulli, con le sue prime $n-2$ derivate, mentre la sua derivata $(n-1)$esima si riduce ad $f(x)$; detta $\varphi(x, \alpha)$ tale funzione, un integrale particolare della (1) è dato da

$$(2)\qquad y(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, \alpha) d\alpha,$$

dove x_0 è un limite fisso ([1]). Crediamo utile rilevare che la φ dipende da α in maniera molto semplice. Basta osservare che se $z(x)$ è un integrale dell' equazione omogenea, lo è anche $z(x-\alpha)$; se poi $z(x)$ si annulla per $\alpha = 0$, con le sue prime $n-2$ derivate, mentre la sua derivata $(n-1)$esima si riduce ad uno, si dovrà avere

$$z(x-\alpha) = \frac{\varphi(x, \alpha)}{f(\alpha)}.$$

Con ciò l' integrale (2) diviene

$$(3)\qquad y(x) = \int_{x_0}^{x} f(\alpha) z(x-\alpha) d\alpha.$$

([1]) Ved. CAUCHY *Oeuvres*, II.e serie, tome VII, p. 40; cfr. anche: GOURSAT, *Cours d' Analyse mathématique*, tome II, 1905, p. 420.

[Occorrerà, naturalmente, che x_0 sia distinto dagli eventuali punti singolari di $f(x)$].

Con questa formula ci sembra si pervenga alla integrazione della (1) assai più speditamente che col metodo di LAGRANGE.

Genova, 29 maggio 1926.