Bollettino Unione Matematica Italiana

Giulio Supino

Sulla distribuzione delle tensioni nei sistemi elastici

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (1926), n.4, p. 180–181.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_4_180_0>

Sulla distribuzione delle tensioni nei sistemi elastici.

Nota di GIULIO SUPINO (a Bologna).

In una Nota, dallo stesso titolo della presente, pubblicata in questo « Bollettino » nel numero di Aprile, ho mostrato che nei sistemi piani i massimi della media dei quadrati delle tensioni in un punto $\left(\text{cioè } \rho^2_m = \frac{1}{2}(\sigma^2_x + \sigma^2_y) + \tau^2\right)$ si trovano sul contorno. Dalla dimostrazione risulta però implicito un caso di eccezione sul quale è necessario richiamare l'attenzione. Ricordiamo il principio della dimostrazione. Considerato un punto P, interno al solido, si trasporti l'origine delle coordinate in P', sufficientemente vicino a P; prendendo l'espressione delle tensioni (quale si ricava dallo sviluppo nel cerchio) si mostra che, tenendo conto dei termini in r $(r = \overline{PP'})$ di ordine più basso, il $\Delta\rho^2_m$ risulta ***positivo***; in tal modo si può concludere che ρ^2_m ha i massimi al contorno. L'eccezione cui ho accennato è dovuta al fatto che, quando i termini in r di ordine più basso che compaiono nella F sono di secondo grado, risulta $\Delta\rho^2_m = 0$ [1]. Allora non si può più limitarsi a considerare i soli termini in r di ordine due, ma, se m è l'ordine più basso, successivo al due, che non si annulla, occorre considerare anche i doppi prodotti in $r^2 \cdot r^m$. In questi prodotti i termini $c_2 \cos 2\alpha + d_2 \operatorname{sen} 2\alpha$ sono i soli del secondo ordine che influiscano: essi danno luogo a tensioni σ_r e σ_t eguali ed opposte ed indipendenti da r. Quindi, affinchè si abbia massimo in un punto interno, è necessario che la sollecitazione elastica contenga una distribuzione di tensioni a dilatazione cubica nulla diffusa in tutto il solido, e che si sovrappone ad un'altra sollecitazione

[1] Come ho osservato nella nota citata, per $n = 2$ la (8) diviene uguale a zero; è da osservare che, in tale ipotesi, orientati gli assi in modo che sia $\tau = 0$, è anche $\frac{\partial \tau}{\partial r} = 0$, $\frac{\partial \sigma_r}{\partial \alpha} = 0$, $\frac{\partial \sigma_t}{\partial \alpha} = 0$.

esistente. Come esempio semplice di un massimo interno al solido presento il seguente che devo alla cortesia del prof. O. SERINI:

Si ponga

$$F = \frac{ca^2}{2}(x^2 - y^2) + \frac{c}{12}(y^4 - x).$$

Segue

$$\sigma_x = -c(a^2 - y^2) \qquad \sigma_y = c(a^2 - x^2) \tag{1}$$

e si vede subito che si ha un massimo nell'origine [1].

Crediamo anche utile segnalare che un'estensione allo spazio di questi risultati urta contro le stesse difficoltà. Così posto:

$$\left\{\begin{aligned} \sigma_x &= -c\left(a^2 - \frac{m-1}{m}y^2 - \frac{z^2}{m}\right) \\ \sigma_y &= c(z^2 - x^2) \\ \sigma_z &= c\left(a^2 - \frac{m-1}{m}y^2 - \frac{x^2}{m}\right), \end{aligned}\right. \tag{2}$$

dove m è il coefficiente di POISSON, si vede facilmente che si ha anche qui un massimo nell'origine. E la sollecitazione (2) è ottenuta con la sovrapposizione di due sollecitazioni del tipo (1); di cui una è precisamente la (1) stessa, resa congruente nello spazio con l'aggiunta della $\sigma_z = \frac{c}{m}(y^2 - x^2)$ e l'altra si ottiene da questa riferendosi al piano yz invece che al piano xy: anche la (2) è quindi una sollecitazione possibile.

Bologna, giugno 1926.

[1] Non si deve credere che le tensioni debbano avere segno opposto nel punto di massimo. Anche la $F = (7x^2 + 5y^2 + x^4 + 2y^2 - 9x^2y^2)\ p$ ha un massimo nell'origine dove le tensioni sono dello stesso segno: $\sigma_x = 10p$ $\sigma_y = 14p$. In nessun caso però si può avere un *massimo* o un *minimo* in F se le tensioni principali sono uguali.