UMI

Sunti di lavori esteri

* Lavori di: P. Montel, Kryloff N., R. Nevanlinna, P. Sergesco, G. Belardinelli, I. Rémoundos, Th. Varopoulos, N. Saltikow, M. Gevrey, A. Bloch, R. Garnier, G. Valiron, A. Denjoy, A. Zigmund, A. Kovanko, A. Cahen, E. F. Collingwood, R. Garnier, I. Myrberg, E. F. Collingwood, P. Humbert, F. Carlson, R. H. Germany

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (1926), n.4, p. 182–191.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_4_182_0>

SUNTI DI LAVORI ESTERI

P. MONTEL: *Sur les modules des zéros des polynômes.* Ann. Éc. Norm. Sup., 1923, S. 3, T. 40, pp. 1-34.

In questo lavoro l'A. stabilisce varî teoremi d'Algebra, di carattere elementare, che danno limiti superiori dei moduli di radici di polinomî soggetti a condizioni determinate: teoremi che hanno riscontro con un'altra categoria di proposizioni in relazione colle varie generalizzazioni del teorema di PICARD sul comportamento di una funzione uniforme nell'intorno di un punto singolare essenziale.

Ecco alcuni dei risultati ottenuti:

I. *L'equazione a* k + 1 *termini*

$$1 + x + a_1 x^{n_1} + a_2 x^{n_2} + \dots + a_{k-1} x^{n_{k-1}} = 0$$
$$(1 < n_1 < n_2 < \dots < n_{k-1})$$

ha sempre una radice di modulo $\leq$ k. *Il valore massimo si ha solo per l'equazione*

$$\left(1 + \frac{x}{k}\right)^k = 0.$$

Per $k = 2$, LANDAU [1] aveva mostrato che l'equazione trinomia

$$1 + x + ax^m = 0, \qquad (1 < m)$$

ha sempre una radice di modulo ≤ 2; la sua dimostrazione è stata semplificata da HURWITZ. Per $k = 3$, LANDAU aveva stabilito che l'equazione quadrinomia

$$1 + x + ax^m + bx^n = 0, \qquad (1 < m < n)$$

ha sempre una radice di modulo inferiore a 8; il limite fu poi

(1) *Ueber der Picardschen Satz.* (Vierteljahrschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich, t. 51, 1906, pp. 316-318). *Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard.* (Ann. Éc. Norm., s. 3, t. 24, 1907, pp. 179-201).

ricondotto a 6, poi ad un numero inferiore a $5\frac{2}{3}$, senza giungere al vero limite, che è 3.

II. *L'equazione a* k + 1 *termini*

$$1 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{p-1}x^{p-1} + x^p + a_px^{n_p} + \ldots + a_{k-1}x^{n_{k-1}} = 0$$
$$(p < n_p < \ldots < n_{k-1})$$

ha sempre una radice il cui modulo è inferiore al numero $q = \sqrt[p]{c_k^p}$; *questo valore massimo è raggiunto solo per le equazioni*

$$\left(1 + \frac{\omega x}{q}\right)^k = 0, \qquad (\omega^p = 1).$$

Con c_k^p si indica il numero delle combinazioni di k oggetti a p a p.

III. *L'equazione a* k + 1 *termini*

$$1 + x^p + a_1x^{n_1} + \ldots + a_{k-1}x^{n_{k-1}} = 0$$
$$(p < n_1 < \ldots < n_{k-1})$$

ha sempre p *radici i cui moduli non superano un numero* $\varphi_p(k)$ *che dipende solo dal numero dei termini dell'equazione.*

Per $p = x_1$ l'A. mostra che $\varphi_2(k) = \sqrt{\frac{k(k+1)}{2}}$ e che il massimo è raggiunto solo per le due equazioni

$$\left(1 \pm \frac{ix}{\varphi_2}\right)\left(1 \mp \frac{kix}{\varphi_2}\right) = 0.$$

Per $p > 2$, egli ritenne che fosse $\varphi_p(k) = \sqrt[p]{c^p_{p+k-1}}$; asserto dimostrato poi da Van Vleck (¹) se il grado del polinomio è prefissato, e da Biernacki (²) nel caso generale.

Siccome il numero $\varphi_p(k)$ decresce al crescere di p mentre k rimane fisso, si vede che l'equazione ha sempre p radici i cui moduli non superano k. Walsh (³) aveva stabilito precedente-

(¹) *On limits to the absolute values of the roots of a polynomial.* (Bull. de la Soc. Math. de France, t. LIII, 1925, pp. 105-125).

(²) *Sur un nouveau théorème d'Algèbre.* (Comptes Rendus, 1923, 2ème sem., p. 1193).

(³) Comptes Rendus, 1923, 1er sem., p. 1209).

mente che questa equazione ammette p radici il cui modulo non supera un numero $\psi(k)$, senza determinarne il calcolo, e PELLET [1] aveva ottenuto alcuni risultati analoghi per la radice di minimo modulo.

Ecco ora alcune proposizioni più generali.

IV. *L'equazione a* k + p *termini*

$$1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_p x^p + a_{p+1} x^{n_{p+1}} + \dots + a_{p+k-1} x^{n_{p+k-1}} = 0$$

$$(a_p \neq 0, \quad p < n_{p+1} < \dots < n_{p+k-1})$$

in cui $a_1, a_2, \dots a_p$ *sono fissi, ha sempre* p *radici i cui moduli non superano un numero fisso* $\varphi_p(a_1, a_2, \dots a_p, k)$.

Un polinomio $P(x)$, di grado p, può essere determinato per mezzo dei valori attribuito ad esso e ad alcune delle sue derivate in punti distinti $x_1, x_2, \dots x_h$. Diamoci i valori

$$P(x_i), \quad P'(x_i), \dots \overset{(\alpha_i - 1)}{P}(x_i), \qquad (i = 1, 2, \dots h)$$

con

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_h = p + 1.$$

Questi valori determinano in generale un polinomio $P(x)$ unico di grado p. Tutti i polinomî che soddisfano alle stesse condizioni di $P(x)$ sono della forma

$$P_k(x) \equiv P(x) + Q(x)\left(a_{p+1} x^{n_{p+1}} + \dots + a_{p+k} x^{n_{p+k}}\right)$$

dove

$$Q(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} \dots (x - x_h)^{\alpha_h}.$$

Si può enunciare il teorema:

V. *I polinomî* $P_k(x)$ *hanno sempre* p *zeri i cui moduli non superano un numero fisso. Questo numero dipende solo dai valori dati, dagli affissi dei punti dati, da* p *e dal numero* k *delle costanti arbitrarie.*

Tutte le proposizioni precedenti si possono formulare dicendo che il polinomio P_k ed il polinomio $P_k - 1$ hanno p radici in un cerchio con centro nell'origine il cui raggio dipende solo dagli elementi fissi e dal numero dei termini di P_k. Ora si sa che, nelle

(1) *Sur la racine de plus petit module des équations.* (Bull. des Sciences Math., s. 2, t. XLVIII, 1924, pp. 265-268).

medesime condizioni, il polinomio P_k *ovvero* il polinomio $P_k - 1$ hanno p radici in un cerchio il cui raggio non dipende che dagli elementi fissi *e non dal numero dei termini di* P_k. Se si sostituisce l'alternativa all'affermativa, il numero dei termini non interviene più. Se si potesse giungere a questo ultimo risultato per via algebrica, si avrebbe una dimostrazione algebrica dei teoremi del tipo PICARD-LANDAU per il caso dei polinomî.

(Dall' Autore).

KRYLOFF N.: *Sur l'estimation de l'erreur commise dans l'application de la méthode de W. Ritz pour l'intégration approchée des équations différentielles.* (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, t. 180, p. 1316).

— — *Sur une méthode, basée sur le principe de minimum, pour l'intégration approchée des équations différentielles* (Ibid., t. 181, p. 86).

— — *Sur une méthode d'intégration approchée contenant comme cas particuliers la méthode de W. Ritz, ainsi que celle des moindres carrés.* (Ibid., t. 182, p. 676).

Il metodo di W. RITZ, tanto applicato in questi ultimi tempi in vari problemi sia di fisica matematica, sia della scienza dell'ingegnere, non dà alcun mezzo per valutare l'ordine dell'errore che si commette arrestando l'approssimazione ad un dato numero di termini. Nella prima delle importanti Note di cui rendiamo qui brevemente conto, l'A., limitandosi, per brevità di esposizione, al caso di una sola dimensione, espone il concetto di un metodo che gli permette di affermare la convergenza del procedimento non solo, ma lo pone in grado di dare anche l'ordine dell'errore commesso in corrispondenza colle condizioni restrittive imposte ai dati del problema.

Nella seconda Nota, l'A. considerando il sistema differenziale

$$(1) \qquad \begin{cases} h(y) = \dfrac{d^2y}{dx^2} + A(x)y = f(x), \quad \text{con} \quad A(x) \leq 0, \\ y(a) = y(b) = 0, \end{cases}$$

stabilisce la convergenza del metodo fondato sulla minimizzazione dell'integrale

$$(2) \qquad \int_a^b (h(y) - f(x))^2 dx;$$

imponendo poi ad $A(x)$ ed $f(x)$ restrizioni supplementari, si possono valutare gli ordini delle approssimazioni ε_m ed η_m:

$$| y(x) - y_m(x) | < \varepsilon_m , \quad | y'(x) - y_m'(x) | < \eta_m ,$$

dove l'integrale $y(x)$ del sistema (1), le successioni minimizzanti $y_m(x)$, della forma

$$y_m(x) = \sum_i^m a_i^{(m)} \varphi_i(x)$$

e le funzioni facilmente calcolabili $\varphi_i(x)$ verificano le condizioni ai limiti (1), cioè $\varphi_i(a) = \varphi_i(b) = 0$. I risultati si generalizzano facilmente per sistemi differenziali più complicati, e tutto lascia credere che il metodo fondato sulla minimizzazione dell'integrale (2) prenderà un posto legittimo fra i metodi d'integrazione approssimata delle equazioni differenziali della Fisica-matematica.

Infine, nella terza Nota, l'A. indica una via di notevole generalità, onde ottenere tutta una serie di metodi nuovi per la risoluzione approssimata delle equazioni differenziali in discorso. Allo scopo, i coefficienti $a_i^{(m)}$ della espressione della soluzione approssimata si determinano mediante il sistema delle equazioni lineari

$$\int_a^b h(y - y_m) M(\varphi_n) dx = 0, \qquad m \leq n, \tag{3}$$

sempre risolubile mediante certe condizioni supplementari imposte all'operatore differenziale $M(\varphi_n)$. L'A. dimostra la convergenza del procedimento, mostrando che è

$$\lim_{m \to \infty} y_m(x) = y(x)$$

e stabilisce nel tempo stesso l'ordine dell'errore che si commette arrestandosi alla m^{esima} approssimazione.

Questo metodo, che contiene come caso particolare tanto quello di W. Ritz come quello dei minimi quadrati, è degno di richiamare l'attenzione dei matematici, anche per la evidente possibilità di svariate generalizzazioni, in ragione dell'arbitrarietà lasciata alla scelta dell'operatore $M(\varphi_n)$.

Una esposizione più particolareggiata delle idee dell'A., degne di molta considerazione, circa all'integrazione approssimata delle equazioni della Fisica-matematica, sta per essere pubblicata negli « Annales de la Faculté des sciences de Toulouse ».

Recensioni delle Note sulla Teoria delle funzioni di variabile complessa, pubblicate nei « Comptes Rendus de l'Académie des Sciences » (2° sem. 1924, Tomo 179).

R. NEVANLINNA (T. 179, pag. 24).

Prosegue lo studio delle funzioni continue crescenti che ha associato alle funzioni meromorfe ([1]) e le applica generalizzando il teorema di PICARD.

P. SERGESCO (*Ibid.*, pag. 322).

LANDAU ha dimostrato ([2]) il seguente teorema: Sia $f(x)$ una funzione limitata $|f(x)| < M$ per $|x| < R$ e sia $f(0) = a$, se $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n$ sono i moduli delle n radici di $f(x) = b$ più prossime allo zero, si ha:

$$\rho_1 \rho_2 \cdots \rho_n \geq \left| \frac{b - a}{n^2 - \bar{a} b} \right| M R^n$$

essendo $\bar{a}$ il coniugato di a; l'A. estende questi risultati utilizzando i metodi di MONTEL, dimostrando differenti teoremi che hanno lo scopo di limitare inferiormente le quantità $|\beta_i - \alpha|$, essendo $f(\alpha) = a$, $f(\beta_i) = b$.

Questi risultati si estendono alle funzioni d'una famiglia normale e permettono di dare un limite inferiore per i poli di una funzione meromorfa nel cerchio $|x| < 1$ e tale che $|f(x) - A| \geq B$.

G. BELARDINELLI (*Ibid.*, pag. 432).

Riassume i principali risultati che ha ottenuto sulla rappresentazione delle radici di una equazione algebrica per mezzo delle funzioni ipergeometriche d'ordine n.

I. RÉMOUNDOS (*Ibid.*, pag. 554).

Sia F una famiglia di funzioni algebroidi in un campo: l'A. introduce il concetto di punto canonico per la famiglia, e per una sola funzione mediante un procedimento del JULIA, e dà una generalizzazione del teorema di PICARD ([3]): « È impossibile di ottenere per una curva algebrica di genere > 1, una rappresentazione parametrica mediante le funzioni algebroidi canoniche nelle vicinanze di un punto essenziale isolato ».

([1]) C. R., T. 178, p. 367; *Untersuchungen ueber Picardschen Satz.* (Acta Societ. Fennicæ t. 50, n. 6).

([2]) LANDAU (The Mathematical Journal, 1914, pag. 104).

([3]) PICARD (Acta Math., t. 11).

TH. VAROPOULOS (*Ibid.*, pag. 589).

Si sa che se una funzione $f(x)$ intera possiede un valore eccezionale, la sua derivata $f'(x)$ non può ammettere che il valore 0 come valore eccezionale [1]; l'A. mostra così che se per una funzione multiforme definita da una equazione della forma

$$f(x, \varphi) = \varphi^r + A_1(x)\varphi^{r-1} + \ldots + A_r(x) = 0,$$

le A_i sono uniformi e legate da $n - 1$ relazioni *lineari a coefficienti* costanti e φ avente un valore eccezionale, la derivata φ' ammetterà lo zero come valore eccezionale.

N. SALTIKOW (*Ibid.*, pag. 590).

Estende alle equazioni differenziali i risultati enunciati da PAINLEVÉ per la teoria degli integrali definiti [2].

P. MONTEL (*Ibid.*, pag. 660 e pag. 803).

Estende alle famiglie dei sistemi S di v funzioni $g_i(z)$, regolari o meromorfe in un certo campo, ed alle funzioni algebroidi d'ordine v la teoria che ha stabilito per le famiglie di funzioni olomorfe o meromorfe. Nella seconda Nota dà delle importanti generalizzazioni dei teoremi dovuti a RÉMOUNDOS, PAROPOULOS, SCHOTTKY, LANDAU [3].

M. GEVREY (*Ibid.*, pag. 663).

Considera una equazione integro differenziale che generalizza una studiata da G. BERTRAND [4] ed indica due metodi di risoluzione.

A. BLOCH (*Ibid.*, pag. 666).

Precisa ed estende una proposizione che BOREL ha ottenuto come generalizzazione del teorema di PICARD sulle funzioni intere.

(1) POLYA, *Ueber die Nullstellen sukzessiver Derivierten* (Math. Zeitsch., 1922).

(2) Vedi: SALTYKOW (Journal de Mathématiques pures et appliquées T. IV, 1925); TONELLI, *Sulla esistenza ecc.* (Boll. Un. Mat. Ital., Anno V., n. 1, 1926).

(3) C. R. T. 137 (1903) pag. 300; *Sur les zéros etc.* (Annales Fac. des Sciences de Toulose, t. 8, 1903).

(4) G. BERTRAND (Annales Scientif. École Norm. t. 40, 1903).

R. GARNIER (*Ibid.*, pag. 727).

Fa noto il metodo che ha impiegato per determinare tutte le superficie algebriche possedenti due differenziali di PICARD la cui inversione genera delle funzioni uniformi. PAINLEVÉ (1) aveva pubblicata la soluzione senza dare alcun dettaglio sulla dimostrazione.

G. VALIRON (*Ibid.*, pag. 740).

Siano f_1, f_2, f_3 tre funzioni intere, $f_3(z)$ d'ordine superiore a quelli di f_1 ed f_2; come BOREL ha portato un complemento al teorema di PICARD, così l'A. ne apporta ad un teorema recente di NEVANLINNA (2).

A. DENJOY (*Ibid.*, pag. 867, e pag. 958).

Enuncia alcuni teoremi fondamentali sulle serie $\Sigma A_n(x-\alpha_n)$ in un campo che possa contenere il punto all'∞ (3). Nella seconda Nota studia le singolarità dello sviluppo, per esempio, se R è campo continuo la cui frontiera contiene α_1 e se $\alpha_2, \alpha_3, \ldots$ sono esterni ad R, si può affermare che α_1 è una singolarità per la $f(x)$ rappresentata dalla serie? Segue SCHOENFLIES, ed enuncia l'importante teorema: è impossibile che in tutti i punti comuni ad R ed ad un cerchio di centro α_1 la somma della serie coincida con la stessa funzione olomorfa.

A. ZIGMUND (*Ibid.*, pag. 870).

Dà una generalizzazione del metodo di CESÀRO per sommazione delle serie, e ottiene conseguenze per la moltiplicazione delle serie.

A. KOVANKO (*Ibid.*, pag. 873).

Dà una generalizzazione del teorema di WEIERSTRASS e MONTEL (4) sulla convergenza uniforme di una successione di funzioni monogene verso una funzione monogena.

(1) C. R. T. 122 (1896). Acta Math. t. 27.

(2) C. R. T. 177, pag. 389, G. VALIRON (Annales Scientifiques École Normale, t. 29, pag. 317); C. R. T. 174.

(3) C. R. T. 173, pag. 1327, e C. R. T. 174, pag. 95.

(4) MONTEL, *Leçons sur les séries de polynomes.* Gauthier-Villars.

A. CAHEN (*Ibid.*, pag. 952).

Applica, a diversi esempi, il metodo di sviluppo in frazione continua generalizzata che ha introdotto precedentemente e studia questi sviluppi dal punto di vista della loro periodicità.

A. BLOCH (*Ibid.*, pag. 954).

Servendosi di un metodo di MONTEL (1) generalizza i risultati che questo autore ha ottenuto sulle famiglie di funzioni olomorfe in un cerchio e prendenti in questo più volte il valore 0 ed 1.

E. F. COLLINGWOOD (*Ibid.*, pag. 955).

Facendo seguito ad un lavoro di NEVANLINNA (2) sulla distribuzione degli zero delle funzioni intere e delle funzioni olomorfe in un cerchio, ne ritrova la proposizione con un metodo più semplice.

R. GARNIER (*Ibid.*, pag. 1026).

Continua gli studi che ha iniziato sugli integrali generali di un sistema differenziale d'ordine $2n$ attorno alle sue singolarità trascendenti e mostra che questi sviluppi danno lo studio locale delle singolarità.

I. MYRBERG (*Ibid.*, pag. 1122).

Considera il sistema

$$f_i[S_m(x)] = \Sigma R_{i,k}^{(m)}(x) f_k(x)$$

ove le R sono razionali ed ove le S indicano delle sostituzioni lineari; queste equazioni comprendono come caso particolare le equazioni alle differenze finite e le equazioni che definiscono le funzioni zetafuchsiane di POINCARÉ, e forma un sistema di soluzioni imitando il procedimento di POINCARÉ per le funzioni fuchsiane.

E. F. COLLINGWOOD (*Ibid.*, pag. 1125).

Tratta dei valori eccezionali delle funzioni intiere d'ordine finito mediante una disuguaglianza ottenuta in una Nota precedente.

(1) Mem. Acad. R. del Belgio, 5ª serie, t. 8, 1922.
(2) *Untersuch. über den Picardschen Satz* (Acta Soc. Fennicæ, t. 50, n. 6, 1914).

P. HUMBERT (*Ibid.*, pag. 1300).

Cercando per l'equazione di LAPLACE nello spazio a 4 dimensioni delle soluzioni di forma determinata restanti finite su dei iperconi, trova l'interessante risultato che queste soluzioni sono fornite da polinomi di HERMITE ad indice immaginario.

F. CARLSON (*Ibid.*, pag. 1302).

Dà degli enunciati più estesi di quelli importanti di MAILLET (1) pel confronto degli zeri di $f(x) = \sum_0^\infty c_n x^n$ con quelli di

$$P_n(x) = c_1 + \dots + c_n x^n.$$

P. MONTEL (*Ibid.*, pag. 1385).

Considera tre funzioni

$$f = a_0 + a_1 z + \dots, \quad g = b_0 + b_1 z + \dots, \quad h = c_0 + c_1 z + \dots$$

olomorfe per $|z| < R$ e tali che le equazioni $f = g$, $g = h$, $h = f$ non abbiano delle radici nel cerchio $|z| < R$ e fa conoscere un limite superiore di R non dipendente che dai primi coefficienti delle serie, ed applica alle funzioni appartenenti a famiglie normali.

R. H. GERMANY (*Ibid.*, pag., pag. 1580).

Applica il metodo delle approssimazioni successive alla integrazione delle equazioni alle derivate parziali.

g. b.

(1) MAILLET, « Journal de Math. », (1902), pag. 343.