Bollettino Unione Matematica Italiana

Enrico Bompiani

Le forme elementari e la teoria proiettiva delle superficie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **5** (1926), n.5, p. 209–214.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1926_1_5_5_209_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1926.

PICCOLE NOTE

Le forme elementari e la teoria proiettiva delle superficie. (*)

Nota 2ª di E. BOMPIANI (a Bologna). (1)

5. Significato geometrico dell'arco proiettivo delle asintotiche. — La forma $\varphi_2 = 2\beta\gamma dudv$ assume valore nullo in ciascun punto $O(u, v)$ per le direzioni asintotiche $(du = 0, dv = 0)$. Consideriamo ora il punto O' sull'asintotica $u(dv = 0)$ avente le coordinate $u + du$, v e calcoliamo φ_2 nel punto O' e per l'elemento lineare di una curva avente un flesso in O (tangente ivi all'asintotica u). Un tale elemento è caratterizzato da $dv = 0$, $d^2v = -\beta du^2$. Poichè $d\varphi_2 = 2\beta\gamma(dud^2v + dvd^2u) + 2d(\beta\gamma)\cdot dudv$, per l'elemento fissato in O' si ha

$$-\frac{1}{2}d\varphi_2 = \beta^2\gamma du^3 = d_1s^3$$

sicchè: *il cubo dell'elemento d'arco proiettivo* d_1s *relativo all'asintotica* u *nel punto* O *è uguale a* $-1|2$ *della variazione subita da* φ_2 *passando dal punto* O *al punto* O'(u + du) *sopra un elemento del* 2^o *ordine di una curva avente in* O *un flesso* (*e tangente all'asintotica* u).

Questa interpretazione dell'arco proiettivo esige la conoscenza, che del resto possediamo, del significato di φ_2. Ma se ne può dare un'interpretazione più diretta.

Consideriamo perciò ancora una curva C tangente all'asintotica u in O (ed ivi dotata di flesso; cioè non avente in comune con l'asintotica un elemento del 2° ordine) e sia O' un punto di

(*) V. la Nota 1ª al num. precedente.

(1) Nell'ultimo enunciato del n.° 4 (pag. 173) ove è scritto *piano canonico* va letto *piano coniugato a quello canonico* (cioè passante per la normale proiettiva e per la tangente coniugata di quella canonica rispetto alle tangenti asintotiche).

essa; per O' conduciamo le asintotiche a tagliare quelle per O e consideriamo la maglia asintotica $OO'_1O'O'_2$ (come al n.° 3).

Per le coordinate di O'_1 si ha

$$x'_1 = x\left[1 + \frac{n}{2}\,du^2 + \frac{1}{3!}n\frac{\partial \log \beta\gamma n}{\partial u}\,du^3\right] +$$

$$+ x_u\left[du + \frac{1}{2}\frac{\partial \log\beta\gamma}{\partial u}du^2 + \frac{1}{3!}\left\{\left(\frac{\partial\log\beta\gamma}{\partial u}\right)^2 + \frac{\partial^2\log\beta\gamma}{\partial u^2} + n\right\}du^3\right] +$$

$$+ x_v\left[\frac{1}{2}\beta du^2 + \frac{1}{3!}\beta\frac{\partial\log\beta^2\gamma}{\partial u}du^3\right] + \frac{1}{3}\beta x_{uv}du^3 + [4]$$

e per O'_2

$$x'_2 = x\left(1 + \frac{\nu}{8}\beta^2 du^4\right) + \frac{1}{8}\beta^2\gamma x_u du^4 +$$

$$+ \left(-\frac{\beta}{2}du^2 + \frac{d^3v}{3!} + \frac{1}{8}\beta^2\frac{\partial\log\beta\gamma}{dv}du^4\right) + [5]$$

ove $[s]$ indica termini d'ordine $\geq s$ in du e dv.

Si proiettino ora i punti O'_1 e O'_2 da una retta generica appoggiata alla tangente asintotica v in O (non passante per O nè contenuta nel piano ivi tangente) sulla tangente all'asintotica u in O. Le coordinate di queste proiezioni $\overline{O}_1$, $\overline{O}_2$ sono del tipo $x + \sigma_i x_u (i = 1, 2)$ e precisamente si ha $\sigma_1 = du$; $\sigma_2 = \frac{\beta^2\gamma}{8}du^4$. *Il termine principale del birapporto* $\overline{O}_2\overline{O}_1O$ *e di un quarto punto generico di questa retta vale appunto* $\frac{1}{8}\beta^2\gamma du^3 = \frac{1}{8}d_1s^3$.

6. Invarianti di una superficie per applicabilità proiettive. — Consideriamo una maglia asintotica (come al n.° 3) i cui lati concorrenti in O abbiano gli elementi d'arco d_1s e d_2s: questi, che sono definiti a meno di una radice cubica dell'unità, siano scelti in modo che, com'è sempre possibile, si abbia

$$d_1s \cdot d_2s = \beta\gamma du dv = \varphi_2/2.$$

La variazione subita dall'elemento d'arco di asintotica u passando dal lato OO'_2 al lato opposto O'_1O', riferita al prodotto degli elementi d'arco concorrenti in O vale (v. n.° 3)

$$\frac{d_1d_2s}{d_1s \cdot d_2s} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\beta^2\gamma}}\psi_1; \quad \frac{d_2d_1s}{d_2s \cdot d_1s} = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{\beta\gamma^2}}\psi_2.$$

Da questi due invarianti (irrazionali) si formano (per prodotto, e per somma o differenza dei loro cubi) gli invarianti razionali

$$\Phi = \frac{2}{\beta\gamma}\psi_1\psi_2; \quad \Psi = \frac{1}{\beta^2\gamma}\psi_1^3 + \frac{1}{\beta\gamma^2}\psi_2^3; \quad \Psi' = \frac{1}{\beta^2\gamma}\psi_1^3 - \frac{1}{\beta\gamma^2}\psi_2^3$$

dei quali quindi è noto il significato.

Ad un altro gruppo di invarianti (contenenti le derivate seconde di β e γ) arriviamo studiando le variazioni dei precedenti variando O sulle asintotiche per esso. Precisamente, calcoliamo la variazione subita dall'invariante infinitesimo

$$\frac{d_1 d_2 s}{d_2 s} = \frac{1}{3}\psi_1 du$$

quando si passi dal punto O (e dal lato OO'_1) al punto O'_2 (e al lato opposto della maglia O'_2O'). Poichè a lati opposti della maglia corrisponde lo stesso du la variazione subita è misurata da

$$d_2 \frac{d_1 d_2 s}{d_2 s} = \frac{1}{3}\frac{\partial\psi_1}{\partial v} du dv = \frac{1}{3}\frac{1}{\beta\gamma}\frac{\partial\psi_1}{\partial v} d_1 s \cdot d_2 s$$

cioè, dividendo per $d_1 s \cdot d_2 s$,

$$\frac{d_2}{d_2 s \cdot d_1 s}\frac{d_1 d_2 s}{d_2 s} = \frac{1}{3}\frac{1}{\beta\gamma}\frac{\partial\psi_1}{\partial v}.$$

Scriveremo in modo più compatto il 1° membro, il cui significato è stato ora precisato,

$$\frac{d_2 d_1 d_2 s}{d_2 s \cdot d_1 s \cdot d_2 s} = \frac{1}{3}\frac{1}{\beta\gamma}\frac{\partial\psi_1}{\partial v}.$$

Analogamente (e con analogo significato per il simbolo a 1° membro)

$$\frac{d_1 d_2 d_1 s}{d_1 s \cdot d_2 s \cdot d_1 s} = \frac{1}{3}\frac{1}{\beta\gamma}\frac{\partial\psi_2}{\partial u};$$

e da questi, per addizione e sottrazione, si hanno i due invarianti

$$-K = \frac{1}{\beta\gamma}\frac{\partial^2 \log \beta\gamma}{\partial u \partial v} = \left(d_1 \frac{d_2 d_1 s}{d_1 s} + d_2 \frac{d_1 d_2 s}{d_2 s}\right) / d_1 s \cdot d_2 s$$

$$-H = \frac{1}{\beta\gamma}\frac{\partial^2 \log \beta/\gamma}{\partial u \partial v} = \left(d_1 \frac{d_2 d_1 s}{d_1 s} - d_2 \frac{d_1 d_2 s}{d_2 s}\right) / d_1 s \cdot d_2 s.$$

È bene insistere sul significato dei simboli introdotti cioè delle operazioni geometriche eseguite perchè non è questo l'unico modo possibile di passare dagli invarianti $\psi_1 du$ e $\psi_2 dv$ a nuovi invarianti (come H e K). Si può p. es. calcolare la variazione di $\frac{1}{3}\psi_1 du$ quando da O si passi ad O'_2 e dall'elemento OO'_1 (di arco proiettivo $d_1 s$) all'elemento $O'_2 O''$ appartenente all'asintotica $O'_2 O'$ di ugual arco proiettivo $d_1 s$ (poichè in generale è $O' \neq O''$ l'elemento $O'_2 O''$ *non* è il lato opposto ad OO'_1 della maglia asintotica considerata). In questo caso bisogna differenziare

$$\frac{d_1 d_2 s}{d_2 s} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{\beta^2 \gamma}} \psi_1 d_1 s$$

rispetto a v (e indicheremo la caratteristica di quest'operazione con d_2) ma con la condizione $d_2 d_1 s = 0$ (invece della precedente $d_2 du = 0$) e si ottiene

$$d_2 \frac{d_1 d_2 s}{d_2 s} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{\beta^2 \gamma}} \frac{\partial \psi_1}{\partial v} dv d_1 s - \frac{1}{9} \frac{1}{\sqrt[3]{\beta^2 \gamma}} \psi_1 \psi_2 dv d_1 s$$

e dividendo per $d_1 s \cdot d_2 s$

$$\frac{1}{d_2 s \cdot d_1 s} \cdot d_2 \frac{d_1 d_2 s}{d_2 s} = \frac{1}{3} \frac{1}{\beta \gamma} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial v} - \frac{1}{3} \psi_1 \psi_2 \right)$$

il cui 1° membro può ancora indicarsi con $\frac{d_2 d_1 d_2 s}{d_2 s \cdot d_1 s \cdot d_2 s}$; le due diverse determinazioni dipendono dalla scelta dell'una o dell'altra delle due condizioni (ambedue intrinseche) $d_2 du = 0$ oppure $d_2 d_1 s = 0$ relative ai differenziali secondi.

Cerchiamo ora la variazione subita da $\frac{d_1 d_2 s}{d_2 s}$ spostandoci, lungo l'asintotica u passante per O, da O ad O'_1: bisogna fissare (in modo intrinseco) l'elemento d'arco uscente da O'_1 per cui si calcola detto invariante. Qui, a differenza del caso precedente non c'è che una scelta possibile. Infatti l'elemento OO'_1 *non* determina il lato (appartenente all'asintotica u) per O'_1 della maglia contigua (mentre determina quello opposto nella maglia di partenza); ciò corrisponde analiticamente al fatto che la posizione $d^2 u = 0$ non ha carattere invariante (rispetto a cambiamenti del parametro u). Si ha invece una scelta intrinseca del lato uscente da O'_1 con la condizione ch'esso abbia lo stesso elemento d'arco proiettivo del lato OO'_1; cioè ponendo $d_1 d_1 s = d_1{}^2 s = 0$. Allora

$$d_1 \frac{d_1 d_2 s}{d_2 s} = \frac{1}{3} d_1 \left(\frac{1}{\sqrt[3]{\beta^2\gamma}} \psi_1 \right) \cdot d_1 s = \frac{d_1 s}{3} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{\beta^2\gamma}} \frac{\partial \psi_1}{\partial u} - \frac{1}{3} \frac{\psi_1}{\sqrt[3]{\beta^2\gamma}} \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial u} \right) du$$

cioè, dividendo per $(d_1 s)^2$ e adottando per il primo membro notazione analoga a quella di prima, si ha

$$\frac{d_1 d_1 d_2 s}{d_1 s d_1 s d_2 s} = \frac{1}{3} \frac{1}{(\beta^2\gamma)^{2/3}} \left(\frac{\partial \psi_1}{\partial u} - \frac{1}{3} \psi_1 \frac{\partial \log \beta^2\gamma}{\partial u} \right) = \frac{1}{3} \frac{1}{(\beta^2\gamma)^{2/3}} \frac{\partial \log \psi_1/(\beta^2\gamma)^{\frac{1}{3}}}{\partial u}$$

insieme all'analogo invariante ottenuto scambiando ovunque i due sistemi di asintotiche. Da questi due invarianti irrazionali se ne possono trovare altri razionali; p. es.

$$\frac{1}{2} \frac{d_1}{d_1 s} \left(\frac{d_1 d_2 s}{d_1 s \cdot d_2 s} \right)^2 - \left(\frac{d_1 d_2 s}{d_1 s \cdot d_2 s} \right)^3 = \frac{1}{9} \frac{\psi_1^2}{\beta^2\gamma} \frac{\partial \log \psi_1/\beta\gamma}{\partial u}$$

e l'analogo; e da questi per somma e differenze si hanno i due invarianti (nella notazione di CECH)

$$\Theta = \frac{\psi_1^2}{\beta^2\gamma} \frac{\partial \log \psi_1/\beta\gamma}{\partial u} + \frac{\psi_1^2}{\beta\gamma^2} \frac{\partial \log \psi_2/\beta\gamma}{\partial v}$$

$$\Theta' = \frac{\psi_1^2}{\beta^2\gamma} \frac{\partial \log \psi_1/\beta\gamma}{\partial u} - \frac{\psi_1^2}{\beta\gamma^2} \frac{\partial \log \psi_2/\beta\gamma}{\partial v}.$$

Si sono così ottenuti, con procedimenti geometrici evidenti, a partire dagli archi proiettivi di asintotiche, tutti gli invarianti fondamentali di una superficie per applicabilità proiettive [1].

7. Invarianti delle curve tracciate sopra una superficie. — Passiamo ora alla ricerca degli invarianti per a. p. di una curva C della superficie.

Invarianti del 1° ordine sono p. es. $ds^2 = \varphi_2 = 2\beta\gamma du dv$ o le due forme elementari (infinitesimi) e $(d_1 s/d_2 s)^3$ (finito) ove s'intende che du, dv sono relativi alla tangente a C in un suo punto generico O.

La definizione di un invariante del 2° ordine (o di curvatura) equivale alla scelta di un modo intrinseco (per a. p.) di definire i differenziali secondi. Un primo modo (che si presenta subito per

[1] Cfr. la *Geometria Proiettiva Differenziale* di G. FUBINI ed E. CECH (Zanichelli, Bologna 1926), Cap. VI.

analogia con la geometria Riemanniana) è di definire la curvatu servendosi dei differenziali controvarianti rispetto alla forma qu: dratica φ_2; ma non è l'unico, nè, per l'interpretazione proiettiv il più semplice.

Infatti nel caso attuale, a differenza di quello classico citat la forma φ_2 non basta più a definire la nostra geometria; bastai invece p. es. le due forme elementari χ_1 e χ_2. Poichè dunque hanno qui *due* forme essenziali appare più naturale e giustifica procedere in modo che tutt'e due entrino nella definizione de l'invariante cercato.

E allora si può procedere così: si assumano su C due arc (infinitesimi) OO' ed $O'O''$ con la condizione che una delle forn elementari, o una loro funzione, assuma su di essi lo stesso valoı La variazione subita dall'altra forma, o da un'altra funzione del due, nel passaggio da OO' ad $O'O''$ è un invariante di curvatu (infinitesimo, di cui si passa subito ad uno finito). Se p. es. O ed $O'O''$ hanno lo stesso ds per la derivata del $\log(d_2s/d_1s)$ su si trova

$$\frac{d}{ds}\log\frac{d_2s}{d_1s}=\frac{2}{3}\left(\psi_1\frac{du}{ds}-\psi_2\frac{dv}{ds}\right)+2\beta\gamma\frac{du\delta^2v-dv\delta^2u}{ds^3}$$

che è effettivamente un invariante del 2° ordine relativo a C (ov le δ^2 indicano differenziali controvarianti relativi a φ_2).