M. Krawtchouk

Sopra un teorema generale di Kronecker

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.1, p. 12–15.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_1_12_0>

Sopra un teorema generale di Kronecker.

Nota di M. KRAWTCHOUK (a Kiew).

Il noto teorema di WEIERSTRASS sulla riduzione delle schiere di forme bilineari è stato completato da KRONECKER con l'esame delle schiere *singolari*, cioè di quelle il cui discriminante si annulla identicamente.

Se la schiera

$$F - \lambda\Phi = \sum_{i,j}(a_{ij} - \lambda b_{ij})\, x_i y_j \tag{1}$$

ha il rango r, possiamo supporre le forme basi F e Φ scelte in modo che abbiano anch'esse rango r. Il teorema di KRONECKER asserisce allora che la schiera (1) equivale ad una somma di schiere elementari dei tipi seguenti:

$$\text{(I)} \quad (\alpha - \lambda)(x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ey_e) + (x_1y_2 + x_2y_3 + \dots + x_{e-1}y_e)$$

$$\text{(II)} \quad (x_1'y_2' + x_2'y_3' + \dots + x_{f-1}'y_f') - \lambda(x_2'y_2' + x_3'y_3' + \dots + x_{f-1}'y_f')$$

$$\text{(III)} \quad \begin{aligned}&(x_1''y_2'' + x_2''y_3'' + \dots + x_{g-1}''y_g'') - \\ &\qquad - \lambda(x_1''y_1'' + x_2''y_2'' + \dots + x_{g-1}''y_{g-1}'').\end{aligned}$$

Vogliamo dare qui una semplice dimostrazione di questo teorema, ricorrendo alla teoria delle matrici.

Riduciamo la matrice della forma bilineare (1), mediante trasformazioni elementari indipendenti da λ, alla seguente forma:

$$(2) \qquad \begin{pmatrix} B & A \\ D & C \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \qquad \left(I = \begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix} \right);$$

la caratteristica della matrice $A - \lambda I$ è r, e, tenuto conto del rango della forma (1), $D = 0$.

Se lo zero è radice di moltiplicità p dell'equazione caratteristica

$$|A - \lambda I| = 0$$

possiamo supporre A della forma:

$$A = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \mathfrak{A} \end{pmatrix} \begin{matrix} \}p \text{ linee} \\ \}q \text{ linee} \end{matrix} \qquad p + q = r,$$

dove $A^p = 0$ e $|\mathfrak{A}| \neq 0$. Ponendo poi

$$C = (\underbrace{\mathfrak{C}}_{p \text{ colonne}} \quad \underbrace{\mathfrak{L}}_{q \text{ colonne}}),$$

possiamo supporre $\mathfrak{L} = 0$: poichè in caso contrario potremmo aumentare il numero p, sostituendo alla matrice A un'altra opportunamente scelta, indipendente da λ e del tipo $A + ZC$.

Del pari, posto B sotto la forma

$$\begin{pmatrix} B \\ \mathfrak{L} \end{pmatrix} \begin{matrix} \}p \text{ linee} \\ \}q \text{ linee} \end{matrix},$$

possiamo supporre $\mathfrak{L} = 0$.

Così otteniamo alfine la matrice della (1) nella forma seguente:

$$(3) \qquad \begin{matrix} B & A - \lambda I & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{J}, \\ 0 & \mathfrak{C} & 0 \end{matrix}$$

dove

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & \mathfrak{J} \end{pmatrix} = \mathfrak{J}.$$

La matrice $\mathfrak{A} - \lambda \mathfrak{J}$ è generica, e pertanto la corrispondente schiera può trasformarsi in una somma di schiere elementari del tipo (I).

Rimane allora da ridurre la matrice

$$(4)\qquad \begin{matrix} B & A-\lambda I \\ 0 & \mathcal{C} \end{matrix}$$

e la corrispondente schiera.

Posto poi

$$I\alpha = \left.\begin{matrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{matrix}\right\} \alpha \text{ linee}$$

possiamo dare alla matrice B in (4), mercè trasformazioni elementari indipendenti da λ, la forma

$$\begin{matrix} 0 & I_{p'} \\ 0 & 0 \end{matrix}$$

Prendendo ora a considerare il rango della matrice (4), è agevole riconoscere che $\mathcal{C}$ assume contemporaneamente le forma

$$\left(\underbrace{\quad 0 \quad}_{p' \text{ colonne}} \begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix}\right)$$

che può ancora ridursi, sempre mediante trasformazioni elementari indipendenti da λ, all'altra

$$\begin{matrix} 0 & I_{\pi'} \\ 0 & 0 \end{matrix} \qquad (p'+\pi' \leq p).$$

Si vede così che la matrice (4) può ridursi, mediante trasformazioni elementari indipendenti da λ, alla forma

$$(5)\qquad \begin{matrix} (0I_{p'}) & -\lambda I_{p'} & 0 & 0 \\ 0 & B' & A'-\lambda I_{\alpha'} & 0 \\ 0 & D' & C' & -\lambda I_{\pi'} \\ 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} I_{\pi'} \\ 0 \end{pmatrix} \end{matrix} \qquad (\alpha' = p - p' - \pi')$$

dove D' è nulla.

Procedendo analogamente, possono darsi a B' e C' in (5) rispettivamente le forme

$$\begin{matrix} 0 & I_{p''} \\ 0 & 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} 0 & I_{\pi''} \\ 0 & 0 \end{matrix} \qquad (p''+\pi'' \leq \alpha')$$

ed alla matrice (5) la seguente:

$$
(6)\quad
\begin{matrix}
(0I_{p'}) & -\lambda I_{p'} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & (0I_{p''}) & -\lambda I_{p''} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & B'' & A''-\lambda I_{\alpha''} & 0 & 0 \\
0 & 0 & D'' & C'' & -\lambda I_{\pi''} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} I_{\pi''} \\ 0 \end{pmatrix} & -\lambda I_{\pi'} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{pmatrix} I_{\pi'} \\ 0 \end{pmatrix}
\end{matrix}
\qquad (\alpha''=\alpha'-p''-\pi'')
$$

ove D'', come più sopra D', è nullo.

Allo stesso modo si può ridurre ulteriormente la matrice (6).

In tal modo può darsi infine alla matrice (4) una forma tale che la corrispondente schiera si scomponga in una somma di schiere elementari dei tipi (II) e (III).

Il teorema di Kronecker è così dimostrato.