Nicola Kryloff

Sopra un nuovo metodo per l'integrazione approssimata delle equazioni differenziali della Fisica Matematica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.1, p. 27–31.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_1_27_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1927.

Sopra un nuovo metodo per l'integrazione approssimata delle equazioni differenziali della Fisica Matematica (*).

Il metodo fondamentale della Fisica Matematica, creato da noti lavori di A. SCHWARZ, E. PICARD, H. POINCARÉ, I. FREDHOLM ed altri geometri contemporanei, presenta come è ben noto l'integrale cercato di una data equazione differenziale (non omogenea) sotto forma di una serie procedente secondo le funzioni, dette

(*) Sunto di una conferenza tenuta all'Istituto Matematico della R. Università di Bologna, il 17 dicembre 1926, dal prof. NICOLA KRYLOFF membro della Accademia delle Scienze di Ukraina (Kiew).

« singolari » relative al problema considerato. Ora queste ultime funzioni non sono generalmente numericamente conosciute e d'altra parte i determinanti di FREDHOLM presentano dal punto di vista del calcolo gravi difficoltà; pertanto, il metodo fondamentale sopra citato non si adatta troppo bene [1] al calcolo numerico, come accade invece per quello di W. RITZ, dove l'espressione approssimata $y_m(x)$ dell'integrale $y(x)$ cercato si presenta sotto forma di una combinazione lineare:

$$y_m(x) = a_1^{(m)}\psi_1(x) + a_2^{(m)}\psi_2(x) + a_3^{(m)}\psi_3(x) + \dots + a_m^{(m)}\psi_m(x)$$

procedente secondo le funzioni *agevolmente* calcolabili $\psi_i(x)$, (come per esempio i seni nel caso più semplice delle condizioni al contorno: $y(a) = y(b) = 0$ per l'integrale cercato di un'equazione differenziale data) che possono servire alla rappresenzazione approssimata delle funzioni, dette « arbitrarie » di una variabile reale.

Ma tanto il metodo di W. RITZ, quanto i metodi, pei quali ho stabilito in questi ultimi tempi la dimostrazione della convergenza [2], (metodo dei minimi quadrati, delle minime potenze, metodo ottenuto generalizzando quello di W. RITZ e quello dei minimi quadrati) presentano alla loro volta il medesimo inconveniente dal punto di vista di calcolo, cioè i coefficienti incogniti $a_i^{(m)}$ dell'espressione approssimata (1) si determinano ogni volta mediante un sistema di equazioni lineari [3], il quale si muta col variare di m, pure tacendo delle difficoltà inerenti, dal punto di vista pratico, al problema di risolvere i sistemi di equazioni lineari con un grande numero di incognite.

Per questo motivo, ho pensato da tempo ad un altro metodo concepito sopra un'idea ben diversa, cioè sopra lo svolgimento dello integrale cercato in serie di funzioni *ortogonalizzate e normalizzate volta per volta in una maniera speciale adattata al problema considerato.*

(1) Basta a questo proposito di rammentare le suggestive parole di H. POINCARÉ nella sua Prefazione alle *Oeuvres complètes de W. Ritz*, Paris, G. Villars.

(2) N. KRYLOFF. *Sur différents procédés d'intégration approchée en Physique Mathématique.* Chapitre I, pp. 1-34. Annales de Toulouse 1926; Note nei « Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris », (t. 180 p. 1316; t. 181 p. 86; t. 182 p. 676); nel « Bulletin de l'Académie des Sciences d'Ucraine », 1924-1926; nel « Bull. of the Amer. Math. Society », 1925; ecc.

(3) Come per esempio nel metodo di W. RITZ e in quello dei minimi quadrati.

Il problema della integrazione della equazione differenziale data si riduce allora alla sola costruzione di queste funzioni $\psi_n(x)$, partendo dalle funzioni date $\varphi_n(x)$, linearmente indipendenti e che possono servire, come per esempio i seni, alla rappresentazione approssimata delle funzioni « arbitrarie » continue. Questa costruzione si opera in modo che le funzioni $\varphi_n(x)$ possono essere inversamente espresse nelle $\psi_n(x)$, le quali alla loro volta possono servire per conseguenza a la rappresentaziuone delle funzioni derivabili, con approssimazione desiderata.

Limitiamoci in questa conferenza, per ragione di brevità, al caso il più semplice ed assai facile a generalizzarsi, ciò al sistema differenziale:

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 y}{dx^2} + A(x)y - f(x) \equiv L(y) - f(x) = 0\,; \\ y(a) = y(b) = 0\,; \end{cases} \qquad A(x) \leq 0.$$

Anzitutto, si scorge subito che, se noi vogliamo rappresentare l'integrale $y(x)$ delle (2) sotto la forma

$$(3) \qquad \sum_1^\infty \psi_n(x) \int_a^b f(x)\psi_n(x)dx,$$

(dove tutto è conosciuto se il sistema $[\psi_n(x)]$ è formato), che il sistema $[\psi_n(x)]$ deve essere ortogonalizzato e normalizzato in una maniera speciale adattata ogni volta al problema che si ha in nota, cioè:

$$\int_a^b \psi_n(x)\, L[\psi_i(x)]dx = \begin{cases} 0, & \text{se è } \; i \neq n\,; \\ 1, & \text{se è } \; i = n\,; \end{cases}$$

e questa operazione sarà sicuramente possibile, se è $A(x) \leq 0$, perchè per mezzo della integrazione per parte e le condizioni al contorno della (2) si vede subito che

$$\int_a^b \psi_n L(\psi_n)dx < 0.$$

Il problema si riconduce dunque a stabilire che per la somma della forma

$$\sum_{n=1}^m \psi_n(x) \int_a^b f(x)\psi_n(x)dx$$

si può realmente approssimare l'integrale $y(x)$ delle (2) con un errore, l'ordine di piccolezza del quale possiamo apprezzare in corrispondenza alle condizioni restrittive imposte ai coefficienti del sistema differenziale dato (2).

A questo proposito prendiamo le mosse dal problema della determinazione dei coefficienti a_i delle equazioni.

$$\int_a^b [y(x) - \sum_1^m a_i\psi_i(x)]L(\psi_i)dx = 0\,; \qquad i \leq m\,; \tag{4}$$

si vede allora che i coefficienti cercati a_i si determinano individualmente ed hanno precisamente la forma identica a quelli dello sviluppo (3), poichè $y(x)$ è l'integrale del sistema (2).

Dalle (4) si trae subito:

$$\int_a^b [y(x) - \sum_1^m a_i\psi_i(x)]\, L\,\{\sum_1^m (A_i^{(m)} - a_i)\psi_i\}\, dx = 0 \tag{5}$$

dove i coefficienti $A_i^{(m)}$ vanno scelti in modo, sicuramente possibile, che l'ordine di piccolezza di $L\{y(x) - \Sigma A_i^{(m)}\psi_i(x)\}$ possa essere apprezzato in corrispondenza alle ipotesi restrittive imposte ai coefficienti del sistema (2) dato.

Ora dalla (5) si ricava agevolmente:

$$\int_a^b [y(x) - \sum_1^m a_i\psi_i(x)]\, L\,[y(x) - \sum_1^m a_i\psi_i(x)]dx =$$

$$= \int_a^b [y(x) - \sum_1^m a_i\psi_i(x)]\, L\,[y(x) - \sum_1^m A_i^{(m)}\psi_i(x)]dx.$$

e da questa, per mezzo delle condizioni al contorno alle quali soddisfano $y(x)$ e $\psi_i(x)$, si ottiene, integrando per parti:

$$\int_a^b \left\{ \left[\frac{d}{dx}[y(x) - \sum_1^m a_i\psi_i(x)]\right]^2 - A(x)[y(x) - \sum_1^m a_i\psi_i(x)]^2 \right\} dx =$$
$$= \int_a^b \{[y(x) - \sum_1^m a_i\psi_i(x)]\, L\,[\sum_1^m A_i^{(m)}\psi_i(x) - y(x)]\}\, dx. \tag{6}$$

Osservando allora che è $A(x) \leq 0$, si trae dalla (6) per mezzo del ragionamento da me già utilizzato (1), che:

$$|y(x) - \sum_1^m a_i\psi_i(x)| < K\varepsilon_m, \tag{7}$$

dove K è una costante numerica e l'ordine di piccolezza di ε_m può essere fissato in corrispondenza alle condizioni restrittive imposte ai $A(x)$ e $f(x)$, cioè a dire, che l'ordine di ε_m dipende dalla esistenza delle derivate di $A(x)$ e $f(x)$.

Ciò che precede dimostra la convergenza del procedimento del ***metodo di ortogonalizzione speciale***, il quale, come noi speriamo, prenderà il suo legittimo posto fra i metodi di integrazione approssimata delle equazioni differenziali della Fisica Matematica.

Notiamo che questo metodo, *come il procedimento di calcolo*, era gia indicato e utilizzato senza la dimostrazione della convergenza per certe equazioni integrali lineari dal Dr. ENSKOG e dal Prof. HECKE (2), il quale dice, che questo procedimento presenta una « auf einem sehr einfachen und schönen mathematischen Gedanken beruhende Methode ».

Comunicando la dimostrazione di convergenza qui svolta, dobbiamo dire che è soltanto a scopo di brevità che abbiamo trattato il caso il più semplice, e che la dimostrazione si generalizza facilmente in casi assai più complicati del sistema differenziale dato (2).

D'altra parte si vede subito qual vasto campo di ricerche si avrà cercando di generalizzare i noti risultati della moderna teoria delle serie di FOURIER al caso attuale.

Bologna, 15 dicembre 1926.

NICOLA KRYLOFF

(1) Loc cit.

(2) HECKE, *Ueber Die Integralgleichung der kinetischen Gastheorie.* Mathematische Zeitschrift, 1922, pp. 284-286.