Bollettino Unione Matematica Italiana

Filippo Sibirani

Equazione di certe spezzate curvilinee

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.1, p. 6–9.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_1_6_0>

Equazione di certe spezzate curvilinee.

Nota di F. Sibirani (a Trieste).

Fissati due assi cartesiani ortogonali, chiamiamo spezzata parabolica d'ordine n una linea l, incontrata da ogni parallela all'asse y in uno ed in un sol punto, che dai punti P_1, P_2,.... P_k è divisa in $k+1$ parti l_0, l_1, l_2,.... l_k, ciascuna delle quali appartiene ad una parabola d'ordine non superiore ad n, di equazione $y=f_i(x)$, con

$$f_i(x)\equiv a_{i0}x^{n_i}+a_{i1}x^{n_i-1}+a_{i2}x^{n_i-2}+....+a_{in-1}x+a_{in}\quad (i=0,1,2,....k)$$

ed ove i numeri n_0, n_1,.... n_k sono non superiori ad n ed uno almeno uguale ad n.

Ci proponiamo di determinare l'equazione cartesiana di tale spezzata.

Siano α_1, α_2,.... α_k le ascisse di P_1, P_2,.... P_k. Si consideri l'equazione

$$\begin{aligned}(1)\qquad y=\ & b_{00}x^n+b_{01}x^{n-1}+b_{02}x^{n-2}+....+b_{0n-1}x+b_{0n}+\\ & +\sum_{i=1}^{i=k}(b_{i1}x^{n-1}+b_{i2}x^{n-2}+....+b_{in-1}x+b_{in})\,|x-\alpha_i|\end{aligned}$$

la quale nell'intervallo $-\infty\vdash\!\dashv\alpha_1$ equivale a

$$\begin{aligned}y=\ & b_{00}x^n+b_{01}x^{n-1}+b_{02}x^{n-2}+....+b_{0n-1}x+b_{0n}+\\ & +\sum_{i=1}^{i=k}(b_{i1}x^{n-1}+b_{i2}x^{n-2}+....+b_{in-1}x+b_{in})(\alpha_i-x),\end{aligned}$$

nell'intervallo $\alpha_k\vdash\!\dashv\infty$ equivale a

$$\begin{aligned}y=\ & b_{00}x^n+b_{01}x^{n-1}+b_{02}x^{n-2}+....+b_{0n-1}x+b_{0n}+\\ & +\sum_{i=1}^{i=k}(b_{i1}x^{n-1}+b_{i2}x^{n-2}+....+b_{in-1}x+b_{in})(x-\alpha_i)\end{aligned}$$

e nell'intervallo $\alpha_p \vdash\!\!\dashv \alpha_{p+1}$ $(p = 1, 2, ... k-1)$ equivale a

$$\begin{aligned} y = b_{00}x^n + b_{01}x^{n-1} + b_{02}x^{n-2} + ... + b_{0n-1}x + b_{0n} + \\ + \sum_{i=1}^{i=p}(b_{i1}x^{n-1} + b_{i2}x^{n-2} + ... + b_{in-1}x + b_{in})(x-\alpha_i) + \\ + \sum_{i=p+1}^{i=k}(b_{i1}x^{n-1} + b_{i2}x^{n-2} + ... + b_{in-1}x + b_{in})(\alpha_i - x). \end{aligned}$$

Ora faremo vedere che i $(k+1)n+1$ coefficienti b_{rs} di (1) si possono determinare in guisa che la (1) sia l'equazione della spezzata parabolica.

Siano $x_1, x_2, ... x_{(k+1)n+1}$ dei numeri disposti in ordine crescente, dei quali

$$x_{qn+1} = \alpha_q \qquad (q = 1, 2, ... k)$$

ed i rimanenti arbitrari.

Se

$$\begin{aligned} b_{00}x_h^n + b_{01}x_h^{n-1} + b_{02}x_h^{n-2} + ... + b_{0n-1}x_h + b_{0n} + \\ + \sum_{i=1}^{i=k}(b_{i1}x_h^{n-1} + b_{i2}x_h^{n-2} + ... + b_{in-1}x_h + b_{in})(\alpha_i - x_h) = f_0(x_h) \\ (h = 1, 2, ... n+1) \end{aligned} \tag{2}$$

e per $p = 1, 2, ... k$ è

$$\begin{aligned} b_{00}x_{pn+r}^n + b_{01}x_{pn+r}^{n-1} + b_{02}x_{pn+r}^{n-2} + ... + b_{0n-1}x_{pn+r} + b_{0n} + \\ + \sum_{i=1}^{i=p}(b_{i1}x_{pn+r}^{n-1} + b_{i2}x_{pn+r}^{n-2} + ... + b_{in-1}x_{pn+r} + b_{in})(x_{pn+r} - \alpha_i) + \\ + \sum_{i=p+1}^{i=k}(b_{i1}x_{pn+r}^{n-1} + b_{i2}x_{pn+r}^{n-2} + ... + b_{in-1}x_{pn+r} + b_{in})(\alpha_i - x_{pn+r}) \\ (r = 2, 3, ... n+1) \end{aligned} \tag{3}$$

la (1) coincide nell'intervallo $-\infty \vdash\!\!\dashv \alpha_1$ con $f_0(x)$, negli intervalli $\alpha_p \vdash\!\!\dashv \alpha_{p+1} (p = 1, 2, ... k-1)$ con $f_p(x)$ ed in $\alpha_k \vdash\!\!\dashv \infty$ con $f_k(x)$.

Le equazioni (2) e (3) sono in numero di $(k+1)n+1$ nelle $(k+1)n+1$ incognite b_{rs}. Se si dimostra che il sistema è possibile, resta dimostrato che la (1) in cui in posto di b_{rs} si mettono le soluzioni del sistema è l'equazione della spezzata parabolica l.

Si tratta dunque di provare che è diverso da zero il determinante dei coefficienti delle b_{rs} nelle (2), (3). Se ordiniamo le equazioni in modo che le incognite si seguano nell'ordine

$$b_{00},\ b_{01}, \dots b_{0n},\ b_{11},\ b_{12}, \dots b_{1n},\ b_{21},\ b_{22}, \dots b_{2n}, \dots b_{k1},\ b_{k2}, \dots b_{kn},$$

il determinante Δ dei coefficienti è formato nel modo seguente: le prime $n+1$ colonne hanno per righe x_i^n, x_i^{n-1}, $x_i^{n-2}, \dots x_i^2$, x_i, 1 $(i = 1, 2, \dots (k+1)n+1)$ e le colonne dalla $(np+2)^{sima}$ alla $(n(p+1)+1)^{sima}$ hanno per prime $pn+1$ righe

$$x_{pn+1}x_i^{n-1} - x_i^n,\ x_{pn+1}x_i^{n-2} - x_i^{n-1}, \dots x_{pn+1} - x_i (i = 1, 2, \dots pn+1)$$

e per rimanenti righe

$$x_i^n - x_{pn+1}x_i^{n-1},\ x_i^{n-1} - x_{pn+1}x_i^{n-2}, \dots x_i - x_{pn+1}$$
$$(i = pn+2, pn+3, \dots (k+1)n+1).$$

Per $p = 1, 2, \dots k$, alla colonna $(np+2)^{sima}$ sommiamo la seconda moltiplicata per x_{pn+1} e sottraghiamo la prima, alla colonna $(np+3)^{sima}$ sommiamo la terza moltiplicata per x_{pn+1} e sottraghiamo la seconda... alla colonna $((p+1)n+1)^{sima}$ sommiamo la $(n+1)^{sima}$ moltiplicata per x_{pn+1} e sottraghiamo la n^{sima}. Divise per 2 tutte le colonne a cominciare dalla $(n+2)^{sima}$, il determinante viene formato nel modo seguente: le prime $n+1$ colonne coincidono con quelle del precedente determinante e le colonne dalla $(np+2)^{sima}$ alla $[n(p+1)+1]^{sima}$ $(p = 1, 2, \dots k)$ hanno per prime np righe quelle del determinante precedente e per rimanenti righe tanti zeri.

Per una ben nota proprietà dei determinanti, il determinante è ugnale al prodotto di

$$2^{nk} \begin{vmatrix} x_{kn+1}^n & x_{kn+1}^{n-1} & \dots & 1 \\ x_{kn+2}^n & x_{kn+2}^{n-1} & \dots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{(k+1)n+1}^n & x_{(k+1)n+1}^{n-1} & \dots & 1 \end{vmatrix}.$$

per

$$\prod_{p=1}^{k} \begin{vmatrix} x_{pn+1}x_p^{n-1} - x_p^n & x_{pn+1}x_p^{n-2} - x_p^{n-1} & \dots & x_{pn+1} - x_p \\ x_{pn+1}x_{p+1}^{n-1} - x_{p+1}^n & x_{pn+1}x_{p+1}^{n-2} - x_{p+1}^{n-1} & \dots & x_{pn+1} - x_{p+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{pn+1}x_{p+n-1}^{n-1} - x_{p+n-1}^n & x_{pn+1}x_{p+n-1}^{n-2} - x_{p+n-1}^{n-1} & \dots & x_{pn+1} - x_{p+n-1} \end{vmatrix}$$

E poichè

$$\begin{vmatrix} x_{pn+1}x_p^{n-1}-x_p^n & x_{pn+1}x_p^{n-2}-x_p^{n-1} & \dots & x_{pn+1}-x_p \\ x_{pn+1}x_{p+1}^{n-1}-x_{p+1}^n & x_{pn+1}x_{p+1}^{n-2}-x_{p+1}^{n-1} & \dots & x_{pn+1}-x_{p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{pn+1}x_{p+n-1}^{n-1}-x_{p+n-1}^n & x_{pn+1}x_{p+n-1}^{n-2}-x_{p+n-1}^{n-1} & \dots & x_{pn+1}-x_{p+n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_p^{n-1} & x_p^{n-2} & \dots & 1 \\ x_{p+1}^{n-1} & x_{p+1}^{n-2} & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{p+n-1}^{n-1} & x_{p+n-1}^{n-2} & \dots & 1 \end{vmatrix} \prod_{s=0}^{n-1}(x_{pn+1}-x_{p+s}),$$

il determinante Δ si scinde in fattori che non sono nulli, per essere diversi fra loro i $(k+1)n+1$ numeri x, e quindi è esso pure diverso da zero.