Luigi Bianchi

Intorno ai sistemi assiali di curve sopra una superficie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **6** (1927), n.2, p. 49–57.
Unione Matematica Italiana
<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_2_49_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1927.

PICCOLE NOTE

Intorno ai sistemi assiali di curve sopra una superficie.

Nota di LUIGI BIANCHI (a Pisa).

Il prof. BOMPIANI, in alcune recenti pubblicazioni, ha esposto una serie di eleganti ricerche sulle proprietà generali della corrispondenza di punto a punto fra due superficie (*). In particolare nella nota preventiva (1), insieme agli enunciati di numerose proposizioni dovute a lui stesso ed al prof. CASTELNUOVO, egli ha fatto anche conoscere due teoremi da me osservati; i teoremi ivi citati come IX) e XI). Siccome il BOMPIANI, nelle pubblicazioni successive, non ha più avuto occasione di ritornare su questi risultati, non credo inutile riprodurne qui le mie dimostrazioni d'allora con alcuni complementi.

1. Riprendendo le cose alquanto da principio, ricordiamo la nozione, fondamentale per le ricerche ricordate, di sistemi *assiali* di curve sopra una superficie, nozione già incontrata dal FUBINI. Diremo col BOMPIANI che un sistema Ω, *doppiamente infinito,* di curve tracciate sopra una superficie S costituisce un sistema assiale quando accada che i piani osculatori delle ∞^1 curve di Ω uscenti da un punto qualunque P di S formino un fascio *con asse non tangente alla* S. Così ad ogni sistema assiale Ω sopra S è coordinata una congruenza C di raggi uscenti (non tangenzialmente)

(*) Cfr. BOMPIANI:

(1) 1) *Corrispondenza puntuale e rappresentazione conforme.* (Rendiconti dei Lincei, vol. 32, 1923).

2) *Nozioni proiettive differenziali.* (Ibid., vol. 33, 1924).

3) *Sistemi coniugati e sistemi assiali di linee.* (In questo Bollettino, anno III, 1924).

4) *Proprietà generali delle rappresentazioni puntuali fra due superficie.* (Annali di Matematica, serie IV, tomo I, 1923-24).

dai punti di S, e diremo C la congruenza degli assi di Ω. Viceversa una qualunque congruenza C di raggi emananti (non tangenzialmente) dai punti di S individua sopra S un sistema assiale Ω di curve, di cui C è la congruenza degli assi. Tanto risulta da semplici considerazioni infinitesimali e si conferma col calcolo formando come segue l'equazione differenziale del secondo ordine, dalla quale le curve di Ω formano le curve integrali. (Cfr. BOMPIANI, M. 4)).

Riferita la superficie S a coordinate curvilinee (u, v), indichiamo con

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$
$$Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2$$

le due forme differenziali fondamentali di S, e mantenendo le consuete notazioni, fissiamo il raggio della congruenza C per un punto generico $P \equiv (u, v)$ di S mediante tre quantità proporzionali ai coseni di direzione del raggio. Queste, essendo escluso il caso di raggi tangenziali, si assumeranno sotto la forma

$$l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v} + X, \quad l\frac{\partial y}{\partial u} + m\frac{\partial y}{\partial v} + Y, \quad l\frac{\partial z}{\partial u} + m\frac{\partial z}{\partial v} + Z,$$

dove la forma delle funzioni $l = l(u, v)$ $m = m(u, v)$ fisserà appunto la congruenza C.

Per esprimere che per una curva Γ di S il piano osculatore in ogni suo punto passa pel raggio corrispondente di C bisogna scrivere che *lungo* Γ si annulla il determinante

$$\begin{vmatrix} l\frac{\partial x}{\partial u} + m\frac{\partial x}{\partial v} + X, & l\frac{\partial y}{\partial u} + m\frac{\partial y}{\partial v} + Y, & l\frac{\partial z}{\partial u} + m\frac{\partial z}{\partial v} + Z \\ dx, & dy, & dz, \\ d^2x, & d^2y, & d^2z \end{vmatrix}.$$

Se questi differenziali, presi lungo Γ, si esprimono pei differenziali primi e secondi du, dv, d^2u, d^2v, basta moltiplicare il determinante ora scritto pel determinante non nullo

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}, & \frac{\partial y}{\partial u}, & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v}, & \frac{\partial y}{\partial v}, & \frac{\partial z}{\partial v} \\ X, & Y, & Z \end{vmatrix}$$

e si avrà l'equazione differenziale richiesta

$$dud^2v - dvd^2u + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} du^3 + \left[2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\right] du^2dv -$$
$$- \left[2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\right] dudv^2 - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} dv^3 +$$
$$+ (ldv - mdu)(Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2) = 0,$$

dove i simboli di Christoffel $\begin{Bmatrix}rs\\t\end{Bmatrix}$ s'intendono calcolati per la prima forma di S.

Immaginando l'equazione delle curve Γ sotto forma esplicita $v = \varphi(u)$, coll'assumere u quale variabile indipendente, l'equazione differenziale del sistema Ω di cui C è la congruenza degli assi, prende la forma definitiva:

$$\text{(A)} \qquad \begin{aligned} v'' - \left[\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} - lD''\right]v'^3 + \left[\begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} + 2lD' - mD''\right]v'^2 - \\ - \left[\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} + 2mD' - lD\right]v' + \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} - mD = 0 \end{aligned}$$
$$\left(v' = \frac{dv}{du}, \quad v'' = \frac{d^2v}{du^2}\right).$$

Naturalmente se la congruenza C si riduce a quella delle normali, con $l = m = 0$, la (A) si riduce all'equazione differenziale delle geodetiche. In ogni altro caso se la superficie S si deforma per flessione e trasporta seco invariabilmente i raggi di C, restano fissi l, m, ma cangia ad ogni deformazione di S il sistema assiale corrispondente.

2. Abbiasi ora una seconda superficie $\overline{S}$, posta colla S in corrispondenza di punto a punto, e suppongasi esplicitamente che *nè l'una nè l'altra superficie sia sviluppabile.* La corrispondenza fra i punti P, $\overline{P}$ delle due superficie s'intenderà fissata dagli stessi valori u, v dei parametri; e distinguiamo con un soprassegno tutte le quantità relative alla $\overline{S}$. Coordiniamo alla $\overline{S}$ una congruenza $\overline{C}$ di raggi non tangenziali, mediante le quantità $\overline{l}$, $\overline{m}$ analoghe alle l, m. Il sistema assiale $\overline{\Omega}$, di cui $\overline{C}$ è la congruenza degli assi, avrà l'equazione differenziale

$$(\overline{\text{A}}) \qquad \begin{aligned} v'' - \left[\begin{Bmatrix}\overline{22}\\1\end{Bmatrix} - \overline{l}\,\overline{D}''\right]v'^3 + \left[\begin{Bmatrix}\overline{22}\\2\end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix}\overline{12}\\1\end{Bmatrix} + 2\overline{l}\,\overline{D}' - \overline{m}\,\overline{D}''\right]v'^2 - \\ - \left[\begin{Bmatrix}\overline{11}\\1\end{Bmatrix} - 2\begin{Bmatrix}\overline{12}\\2\end{Bmatrix} + 2\overline{m}\,\overline{D}' - \overline{l}\,\overline{D}\right]v' + \begin{Bmatrix}\overline{11}\\2\end{Bmatrix} - \overline{m}\,\overline{D} = 0. \end{aligned}$$

Quando accadrà che i due sistemi assiali Ω, $\overline{\Omega}$ sopra S, $\overline{S}$ siano formati di linee corrispondenti? Per questo occorre e basta che le due equazioni differenziali Ω, $\overline{\Omega}$ coincidano, e si verifichino quindi insieme le quattro relazioni

$$(\alpha) \qquad \left\{ \begin{aligned} l D'' - \bar{l}\, \overline{D}'' &= \left\{ {22 \atop 1} \right\} - \overline{\left\{ {22 \atop 1} \right\}} \\ m D - \overline{m}\, \overline{D} &= \left\{ {11 \atop 2} \right\} - \overline{\left\{ {11 \atop 2} \right\}} \end{aligned} \right.$$

$$(\beta) \qquad \left\{ \begin{aligned} (l D - 2mD') - (\bar{l}\, \overline{D} - 2\overline{m}\, \overline{D}') &= \left[\left\{ {11 \atop 1} \right\} - 2 \left\{ {12 \atop 2} \right\} \right] - \left[\overline{\left\{ {11 \atop 1} \right\}} - 2 \overline{\left\{ {12 \atop 2} \right\}} \right] \\ (mD'' - 2lD') - (\overline{m}\, \overline{D}'' - 2\bar{l}\, \overline{D}') &= \left[\left\{ {22 \atop 2} \right\} - 2 \left\{ {12 \atop 1} \right\} \right] - \left[\overline{\left\{ {22 \atop 2} \right\}} - 2 \overline{\left\{ {12 \atop 1} \right\}} \right]. \end{aligned} \right.$$

Ma supponiamo soltanto assegnata la corrispondenza fra i punti di S, $\overline{S}$ e domandiamo se esiste qualche sistema assiale di S, cui corrisponda un sistema assiale di $\overline{S}$. In tal caso saranno disponibili le quattro quantità

$$l, \ m; \quad \bar{l}, \ \overline{m},$$

e queste saranno da determinarsi in guisa da soddisfare alle quattro equazioni lineari (α), (β). Generalmente il problema avrà una ed una sola soluzione. Soltanto quando il determinante del detto sistema lineare si annulli, il problema sarà o impossibile o indeterminato, cioè: ***o nessun sistema assiale si conserverà nella rappresentazione o se ne conserveranno infiniti.***

Per esaminare la cosa più da vicino procediamo come segue. (Cfr. BOMPIANI, M. 4, § 4).

Riferiamo una delle due superficie, sia la S, alle sue linee asintotiche (u, v) (distinte) onde avremo

$$D = D'' = 0, \quad D' \neq 0.$$

Generalmente sulla $\overline{S}$ nè le u, nè le v saranno asintotiche, e per ciò avremo:

$$\overline{D} \neq 0, \quad \overline{D}'' \neq 0;$$

allora le (α) dànno i valori di $\bar{l}$, $\overline{m}$, e le (β), essendo $D' \neq 0$ quelli di l, m, e in tal caso un solo sistema assiale è conservato.

Ma può accadere che anche sulla $\overline{S}$ le linee v o le u siano asintotiche, ovvero anche ambedue. Distinguendo i due casi, avremo p. es. nel primo

$$\overline{D} = 0, \quad \overline{D}'' \neq 0, \quad \overline{D}' \neq 0.$$

La prima delle (α) fissa in tal caso il valore di l, mentre la seconda si traduce nella relazione necessaria

$$(1) \qquad \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \overline{\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}}.$$

Se questa non è soddisfatta nessun sistema assiale si conserva. Ma, se vale la (1), allora *resta arbitraria* $\overline{m}$ e le (β) fissano corrispondentemente i valori di l, m.

Nel secondo caso poi, quando su S, $\overline{S}$ si corrispondono ambedue i sistemi di asintotiche (i sistemi coniugati), avendosi anche

$$\overline{D} = 0, \quad \overline{D}'' = 0,$$

le (α) dànno come condizioni necessarie le due simultanee

$$(2) \qquad \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \overline{\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\}}, \quad \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \overline{\left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\}},$$

senza di che nessun sistema assiale è conservato. Se poi valgono le (2), si possono prendere arbitrariamente l, m (ovvero $\overline{l}$, $\overline{m}$) e determinare corrispondentemente dalle (β) le quantità $\overline{l}$, $\overline{m}$ (ovvero l, m). Così dunque:

Se la corrispondenza fra S, $\overline{\mathrm{S}}$ *conserva i sistemi coniugati, o nessun sistema assiale è conservato, o si conservano tutti, per modo che ad ogni sistema assiale di* S *ne corrisponde uno ed uno solo di* $\overline{\mathrm{S}}$.

3. Prendiamo una superficie reale S qualunque, che non sia però nè una sviluppabile nè una sfera, e facciamone l'immagine di Gauss sulla sfera $\overline{S}$. Qui il caso eccezionale resta escluso, e vi ha quindi un solo sistema assiale $\overline{\Omega}$ sulla sfera $\overline{S}$ che è immagine di un sistema assiale Ω di S. Ora domandiamo quando è che il sistema $\overline{\Omega}$ sulla sfera è quello dei circoli massimi (geodetiche). Siccome questi sono le immagini delle *linee d'ombra* di S (linee di contatto dei cilindri circoscritti) la questione equivale alla ricerca di quelle superficie le cui linee d'ombra formano un sistema assiale. Manifestamente ogni quadrica risponde al problema, poichè le sue linee d'ombra sono le sezioni piane centrali. Stabiliamo che si tratta di una proprietà caratteristica, cioè:

Se le linee d'ombra di una superficie S *formano un sistema assiale, la* S *è necessariamente una quadrica* [1].

[1] La proposizione è da confrontarsi coll'altra (vedi Blaschke): *Le superficie con linee d'ombra piane sono tutte e sole le quadriche.* (Differentialgeometrie, Bd. II, S. 119).

Per dimostrarlo, riferiamo la superficie S alle sue linee asintotiche, reali ed immaginarie ma distinte, ed avremo

$$D=0, \quad D''=0.$$

Poichè inoltre, secondo l'ipotesi, la congruenza $\overline{C}$ relativa alla sfera $\overline{S}$ è quella delle normali, sarà da porre

$$l=0, \quad \overline{m}=0.$$

Così le (α) tornano a dare come necessarie ancora le (2). D'altronde, per la rappresentazione sferica di una superficie S in coordinate asintotiche, sussistono in generale le formule

$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=-\overline{\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}}, \quad \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=-\overline{\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}}.$$

le quali, paragonate alle (2), dimostrano che qui si avrà necessariamente

$$\begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}=0.$$

Ma queste esprimono che le linee (u, v) sulla S sono geodetiche, e poichè sono anche asintotiche, di necessità sono rette, cioè la S è una quadrica. c. d. d.

Dalla proposizione dimostrata discende anche come corollario: *Se le linee di contatto dei coni circoscritti dai punti di un piano* π *ad una superficie* S *formano un sistema assiale, la* S *è una quadrica.* Difatti un'omografia dello spazio che cangi il piano π nel piano improprio trasforma la S in una superficie S' le cui linee d'ombra formano un sistema assiale. Per ciò S', quindi anche S, è una quadrica.

4. Supponendo ancora una superficie S rappresentata al modo di Gauss sulla sfera $\overline{S}$, domandiamo in generale di trovare i due i due sistemi assiali Ω, $\overline{\Omega}$ che si conservano nella rappresentazione. Questa volta però riferiamoci alle linee di curvatura (u, v) di S ed alle loro linee immagini sulla sfera $\overline{S}$, e sia

$$ds'^2=edu^2+gdv^2$$

il quadrato dell'elemento lineare sferico. Se con r_1, r_2 denotiamo i raggi principali di curvatura S, varranno le formule (di Codazzi)

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial r_1}{\partial u}&=(r_2-r_1)\frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial u}\\ \frac{\partial r_2}{\partial v}&=(r_1-r_2)\frac{1}{2e}\frac{\partial e}{\partial v},\end{aligned}\right.$$

e si avrà inoltre

$$\begin{cases} D = -e r_2, \quad D'' = -g r_1, \quad D' = 0 \\ \overline{D} = -e, \quad \overline{D}'' = -g, \quad \overline{D}' = 0. \end{cases}$$

Con queste formule, e col calcolo dei simboli di CHRISTOFFEL, le equazioni (α), (β) pel calcolo di l, m; $\overline{l}$, $\overline{m}$ diventano

$$(3) \quad \begin{cases} \overline{l} - r_1 l = \dfrac{1}{e r_2} \dfrac{\partial r_1}{\partial u}, & \overline{m} - r_2 m = \dfrac{1}{g r_1} \dfrac{\partial r_2}{\partial v} \\ \overline{l} - r_2 l = \dfrac{1}{e} \dfrac{\partial \log r_2}{\partial u} - \dfrac{2}{e} \dfrac{\partial \log r_1}{\partial u}, & \overline{m} - r_1 m = \dfrac{1}{g} \dfrac{\partial \log r_1}{\partial v} - \dfrac{2}{g} \dfrac{\partial \log r_2}{\partial v}. \end{cases}$$

Risolvendo, si trova:

$$(\gamma) \quad l = \frac{1}{e(r_1 - r_2)} \left[\frac{1}{r_2} \frac{\partial (r_2 - r_1)}{\partial u} - \frac{2}{r_1} \frac{\partial r_1}{\partial u} \right], \quad m = \frac{1}{g(r_2 - r_1)} \left[\frac{1}{r_1} \frac{\partial (r_1 - r_2)}{\partial v} - \frac{2}{r_2} \frac{\partial r_2}{\partial v} \right]$$

$$(\delta) \quad \overline{l} = \frac{r_1}{e(r_1 - r_2)} \frac{\partial}{\partial u} \log \left(\frac{r_2}{r_1^3} \right), \qquad \overline{m} = \frac{r_2}{g(r_2 - r_1)} \frac{\partial}{\partial v} \log \left(\frac{r_1}{r_2^3} \right),$$

e risultano così determinate le due congruenze C, $\overline{C}$ degli assi dei sistemi assiali conservati sulla superficie S e sulla sfera $\overline{S}$.

Qui applichiamo nuovamente le ultime formule (δ) alla ricerca delle superficie con linee d'ombra formanti un sistema assiale. Ne risultano, come condizioni necessarie e sufficienti, le due

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{r_2}{r_1^3} \right) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{r_1}{r_2^3} \right) = 0,$$

ossia

$$\frac{r_2}{r_1^3} = V, \quad \frac{r_1}{r_2^3} = U$$

con V funzione della sola v, U della sola u. Si è visto già (n.° 3) che le superficie in questione sono solo le quadriche e si ha così una nuova prova della proposizione di BONNET:

Le superficie di 2° grado sono caratterizzate dalla proprietà che lungo ciascuna linea di curvatura il relativo raggio principale di curvatura è proporzionale al cubo dell'altro.

Come si sa, il BONNET incontrò questa proposizione nelle sue ricerche sui sistemi tripli ortogonali ed isotermi [1]. Qui la pro-

[1] BONNET: Journal de l'École Polytechnique, XXX Cahier. Cfr. DARBOUX: *Théorie des surfaces*, T. 2ème, pag. 401.

prietà appare equivalente all'altra che hanno le linee d'ombra di queste superficie di formare un sistema assiale.

5. Veniamo da ultimo ad un esempio assai notevole delle circostanze segnalate alla fine del n.° 2, quando la corrispondenza fra S, $\overline{S}$ conserva i sistemi coniugati e ***insieme un sistema assiale,*** chè allora ogni altro sistema assiale è conservato.

Secondo i teoremi di CECH-FUBINI, questo è il caso caratteristico dell'*applicabilità proiettiva* fra S, $\overline{S}$. Ora in un esempio di questo caso mi sono imbattuto nelle mie antiche ricerche sulla deformazione delle quadriche, precisamente nel problema delle coppie di superficie S, $\overline{S}$ ***coniugate in deformazione*** [1]. Si tratta delle coppie $(S, \overline{S})$ di superficie che, senza offrire il caso ovvio dell'omotetia, si corrispondono insieme per sistemi coniugati e ***per linee geodetiche.*** Allora anche ad ogni sistema di asintotiche ***virtuali*** di S corrisponde un sistema di asintotiche virtuali di $\overline{S}$, sicchè ad ogni deformazione della S per flessione ne corrisponde una per $\overline{S}$; la deformazione coniugata. Siccome in questo caso, oltre i sistemi coniugati, si conservano anche due sistemi assiali, quelli delle linee geodetiche, così anche tutti gli altri si conservano. Per esaminarne il modo ricorriamo nuovamente alle (α), (β) n.° 2, nelle quali a causa della corrispondenza geodetica fra S, $\overline{S}$, i secondi membri sono nulli. Di più, corrispondendosi i sistemi coniugati, sussistono le proporzioni

$$D = \lambda \overline{D}, \quad D' = \lambda \overline{D}', \quad D'' = \lambda \overline{D}''$$

ed il fattore di proporzionalità λ ha il valore indipendente dalle flessioni

$$\lambda = \sqrt{\frac{EG - F^2}{\overline{E}\,\overline{G} - \overline{F}^2}}, \quad \sqrt{\frac{K}{\overline{K}}},$$

dove K, $\overline{K}$ sono le curvature di S, $\overline{S}$.

Le (α), (β) si riducono, dopo ciò, alle quattro condizioni

$$\left\{\begin{array}{ll} \overline{D}(\overline{m} - \lambda m) = 0, & \overline{D}''(\overline{l} - \lambda l) = 0, \\ \overline{D}(\overline{l} - \lambda l) - 2\overline{D}'(\overline{m} - \lambda m) = 0, & \overline{D}''(\overline{m} - \lambda m) - 2\overline{D}'(\overline{l} - \lambda l) = 0, \end{array}\right.$$

e dànno semplicemente

$$\overline{l} = \lambda l, \quad \overline{m} = \lambda m.$$

[1] Rendiconti dei Lincei (aprile 1902-aprile 1904. Cfr. *Lezioni*, vol. 3°, (2ª edizione), Cap. V.

Queste formule assegnano la legge di corrispondenza per le congruenze C, $\overline{C}$ degli assi dei sistemi assiali corrispondenti. Ne segue che se, mantenendo fissi l, m, si assoggetta la S a una qualunque deformazione per flessione, e contemporaneamente la $\overline{S}$ alla deformazione coniugata, anche $\overline{l}$, $\overline{m}$, restano fissi, ciò che si interpreta geometricamente così:

Se la superficie S *si deforma, seco trasportando in sistema invariabile i raggi della congruenza* C, *anche la coniugata in deformazione* $\overline{\mathrm{S}}$ *trasporta seco, in sistema invariabile, i raggi della congruenza corrispondente* $\overline{\mathrm{C}}$.