Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Pietro Tortorici

Sulla deformazione dell'iperboloide rotondo ad una falda

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.2, p. 72–80.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_2_72_0>

Sulla deformazione dell'iperboloide rotondo ad una falda.

Nota di PIETRO TORTORICI (a Palermo).

1. Due ben noti teoremi dovuti a BIOCHE e LAGUERRE dànno modo di costruire, assai elegantemente, le deformate rigate dell'iperboloide rotondo ad una falda ed, inoltre, il teorema di CHIEFFI, mediante integrazione di equazioni differenziali del tipo di RICCATI, ne fornisce quante si vogliano altre coppie non appena sia nota una coppia di deformate complementari di questa superficie.

D'altra parte, le trasformazioni del BIANCHI fanno pure conoscere quante si vogliano deformate dell'iperboloide sì che *a priori* è chiaro che ben poco può restare da dire sulle deformazioni di questa superficie con un sistema di generatrici supposte rigide.

Ma, che io sappia, le equazioni in termini finiti non si posseggono o, quanto meno, non sono state rilevate esplicitamente che per le elicoidi e non mi pare perciò inutile far conoscere la equazione esplicita di una particolare e notevole deformata nella quale mi sono imbattuto.

Questa equazione è precisamente:

$$x \cos \frac{z}{b^2} - y \operatorname{sen} \frac{z}{b^2} = bc, \tag{1}$$

b e c essendo due costanti legate dalla relazione

$$b^2 + c^2 = 1.$$

In verità le equazioni della superficie (1) furono sostanzialmente date da me in coordinate asintotiche qualche tempo fa, ma il fatto che la superficie fosse applicabile sull'iperboloide risultò allora indirettamente dalla circostanza che essa apparteneva, come una falda della superficie focale, ad una congruenza W normale [1].

Io qui, oltre a dare l'equazione esplicita della superficie, dedurrò l'applicabilità direttamente appoggiandomi solo sul mio metodo di deformazione delle superficie rigate esposto nel primo capitolo della mia Memoria sul problema di BIANCHI citata e alla quale rimando senz'altro il lettore per le notazioni; metterò ora inoltre in luce nuove notevoli circostanze geometriche.

2. La superficie (1) è segata da ogni piano di equazione

$$z = k \qquad (k \text{ costante}),$$

secondo una retta e però essa ammette uno qualunque di questi piani come piano direttore. Ricercherò adunque la deformata a piano direttore dell'iperboloide cominciando col determinarne i coseni direttori normalizzati della normale.

Sia l'iperboloide a tre assi:

$$\frac{x^2}{\rho_1^2} + \frac{y^2}{\rho_2^2} - \frac{z^2}{\rho_3^2} = 1 ;$$

posto:

$$a = -\sqrt{\frac{\rho_2\rho_3}{\rho_1}}, \quad b = -\sqrt{\frac{\rho_3\rho_1}{\rho_2}}, \quad c = \sqrt{\frac{\rho_1\rho_2}{\rho_3}},$$

le espressioni in coordinate asintotiche u, v dei coseni normalizzati $\bar\xi$, $\bar\eta$, $\bar\zeta$ della sua normale sono:

$$(2) \qquad \bar\xi = a\,\frac{1+uv}{u+v}, \quad \bar\eta = b\,\frac{u-v}{u+v}, \quad \bar\zeta = c\,\frac{1-uv}{u+v}$$

e, per scrivere questi coseni sotto la forma tipica:

$$(2') \qquad \bar\xi = \frac{f_1'(u)}{\varphi'(u)} - \frac{2f_1(u)}{\varphi(u)+v}, \quad \bar\eta = \frac{f_2'(u)}{\varphi'(u)} - \frac{2f_2(u)}{\varphi(u)+v},$$
$$\bar\zeta = \frac{f_3'(u)}{\varphi'(u)} - \frac{2f_3(u)}{\varphi(u)+v},$$

basta assumere:

$$f_1(u) = \frac{1}{2}au^2 - \frac{1}{2}a, \quad f_2(u) = bu, \quad f_3(u) = \frac{1}{2}cu^2 + \frac{1}{2}c; \quad \varphi(u) = u.$$

[1] Cfr. P. TORTORICI, *Il problema di Bianchi*. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, T. XLVI (1922).

Operando una omotetia con centro nella origine delle coordinate può ritenersi che le costanti a, c verifichino la relazione

$$a^2 + c^2 = 1$$

e si ha allora:

$$\begin{aligned} f_1^2(u) + f_2^2(u) + f_3^2(u) &= \frac{1}{4}(u^2+1)^2 - (a^2 - b^2)u^2, \\ f_1'^2(u) + f_2'^2(u) + f_3'^2(u) &= u^2 + b^2, \\ f_1''^2(u) + f_2''^2(u) + f_3''^2(u) &= 1. \end{aligned}$$

Per i coseni normalizzati ξ, η, ζ della normale della deformata a piano direttore che si ricerca si ponga, come è lecito,

$$(3) \qquad \xi = \varphi_1(u), \quad \eta = \varphi_2(u), \quad \zeta = \varphi_3(u) + v$$

assumendo appunto a piano direttore della superficie il piano $z = 0$.

Con notazione ormai conosciuta si ha:

$$(4) \qquad \begin{aligned} A(u) = S\varphi_1^2(u), \quad B(u) = 2\varphi_3(u), \quad C = 1, \\ \Phi(u) = S\varphi_1'^2(u), \end{aligned}$$

e, poichè le superficie aventi per coseni normalizzati delle rispettive normali (2) e (3) ordinatamente devono essere applicabili, devono esistere due funzioni ω e ϑ delle variabili u tali che, secondo il metodo di deformazione ricordato, abbiano luogo le relazioni:

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega'(u) &= [B(u) + 2\vartheta(u)]\varphi'(u), \\ \omega(u)\vartheta'(u) &= [A(u) + B(u)\vartheta(u) + \vartheta^2(u)]\varphi'(u), \\ Sf_1^2(u) &= \frac{1}{4}\omega^2(u), \\ Sf_1'^2(u) &= \omega(u)\vartheta'(u)\varphi'(u), \\ Sf_1''^2(u) &= \Phi(u)\varphi'^2(u) + \Gamma(u) \end{aligned} \right.$$

essendo

$$\begin{aligned} \Gamma(u) = 3\theta'^2(u)\varphi'^2(u) + \omega(u)\vartheta''(u)\varphi''(u) - \omega''(u)\vartheta'(u)\varphi'(u) + \\ + \omega'(\qquad u)\varphi''(u) + \omega'(u)\varphi'(u)\vartheta''(u). \end{aligned}$$

Nel caso dell'iperboloide rotondo è $a = b$ e quindi le ultime tre equazioni del precedente sistema, tenuto conto che è $\varphi(u) = u$, si scrivono:

$$\left\{ \begin{aligned} (u^2+1)^2 &= \omega^2(u) \\ u^2 + b^2 &= \omega(u)\vartheta'(u) \\ 1 &= \Phi(u) + 3\vartheta'^2(u) - \vartheta'(u)\omega''(u) + \omega'(u)\vartheta''(u). \end{aligned} \right.$$

In forza della prima di queste, può assumersi:

$$\omega(u) = u^2 + 1$$

e la seconda allora dà:

$$\vartheta'(u) = 1 + \frac{b^2 - 1}{u^2 + 1}, \quad \vartheta''(u) = -\frac{2(b^2 - 1)u}{(u^2 + 1)^2}.$$

Fissando $\vartheta(u)$ mediante la relazione

$$\vartheta(u) = u^2 + (b^2 - 1) \operatorname{arc\,tg} u,$$

si deduce ancora, dall'ultima delle precedenti relazioni:

$$\Phi(u) = \frac{1 + 2b^2 - 3b^4}{(u^2 + 1)^2},$$

dopo di che le prime due equazioni del sistema (5) forniscono:

$$A(u) = b^2 + \{(b^2 - 1) \operatorname{arc\,tg} u\}^2$$
$$B(u) = 2(1 - b^2) \operatorname{arc\,tg} u$$

e dalle (4) si ottiene per φ_3 l'espressione:

$$\varphi_3(u) = \frac{B(u)}{2} = (1 - b^2) \operatorname{arc\,tg} u,$$

e, per le altre due funzioni incognite φ_1, φ_2 le condizioni:

$$\varphi_1^2(u) + \varphi_2^2(u) = b^2,$$
$$\varphi_1'^2(u) + \varphi_2'^2(u) = \frac{4b^2(1 - b^2)}{(u^2 + 1)^2}.$$

Introducendo una funzione ausiliare $\psi(u)$ con le posizioni

$$\varphi_1(u) = b \cos \psi(u), \quad \varphi_2(u) = b \operatorname{sen} \psi(u),$$

l'ultima equazione impone la condizione:

$$\psi'^2(u) = \frac{4(1 - b^2)}{(u^2 + 1)^2}$$

e può perciò scegliersi la funzione $\psi(u)$ ponendo

$$\psi(u) = 2\sqrt{1 - b^2} \operatorname{arc\,tg} u.$$

Si ha, dunque, infine

$$\begin{cases} \varphi_1(u) = b \cos (2\sqrt{1 - b^2} \operatorname{arc\,tg} u), \\ \varphi_2(u) = b \operatorname{sen} (2\sqrt{1 - b^2} \operatorname{arc\,tg} u), \\ \varphi_3(u) = (1 - b^2) \operatorname{arc\,tg} u. \end{cases}$$

Si cambi ora il parametro u in $\operatorname{tg} \frac{\psi(u)}{2\sqrt{1-b^2}}$ e quindi il nome di questo nuovo parametro nuovamente in u; si ottiene:

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_1(u) = b \cos u, \\ \varphi_2(u) = b \operatorname{sen} u, \\ \varphi_3(u) = \frac{c}{2} u \end{array}\right.$$

e, per i coseni normalizzati ξ, η, ζ ricercati, si hanno le espressioni definitive

$$\xi = b \cos u, \quad \eta = b \operatorname{sen} u, \quad \zeta = \frac{c}{2} u + v. \tag{6}$$

Le formule di LELIEUVRE, previa integrazione, dànno per le coordinate (x, y, z) del punto generico della corrispondente superficie:

$$\left\{\begin{array}{l} x = \left(\frac{c}{2} u + v\right) b \operatorname{sen} u + bc \cos u \\ y = -\left(\frac{c}{2} u + v\right) b \cos u + bc \operatorname{sen} u \\ z = -b^2 u \end{array}\right. \tag{7}$$

e, poichè dalle prime due di queste uguaglianze risulta:

$$x \cos u + y \operatorname{sen} u = bc,$$

in forza dell'ultima si ha:

$$x \cos \frac{z}{b^2} - y \operatorname{sen} \frac{z}{b^2} = bc$$

cioè appunto l'equazione esplicita della deformata richiesta a piano direttore dell'iperboloide di rotazione e potrebbero scriversi immediatamente le effettive formule di applicabilità.

3. Si riguardi quest'ultima superficie come una classe doppiamente infinita di faccette e siano $(x, y, z, 1)$, (ξ, η, ζ, τ) le due quaderne di coordinate plückeriane della faccetta generica. La condizione di appartenenza

$$x\xi + y\eta + z\zeta + 1\tau = 0,$$

tenuto conto delle (6), (7) dà

$$\tau = b^2 u\zeta - b^2 c.$$

Siano (x^*, y^*, z^*, t^*), $(\xi^*, \eta^*, \zeta^*, \tau^*)$ le coordinate plückeriane della faccetta coniugata alla generica della superficie precedente nel sistema nullo corrispondente alla sostituzione lineare:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & -b^2 & 0 \end{pmatrix};$$

si ha, denotando ρ e σ due fattori di proporzionalità:

$$\rho\xi^* = -y, \quad \rho\eta^* = x, \quad \rho\zeta^* = b^2, \quad \rho\tau^* = -b^2 z,$$
$$\sigma x^* = -b^2\eta, \quad \sigma y^* = b^2\xi, \quad \sigma z^* = \tau, \quad \sigma t^* = -\zeta.$$

Volendo scegliere, per le coordinate dei punti, coordinate plückeriane pure $(t^* = 1)$, si fisserà $\sigma = -\zeta$ con che risulta:

$$x^* = \frac{b^3 \operatorname{sen} u}{\frac{c}{2}u + v}, \quad y^* = -\frac{b^3 \cos u}{\frac{c}{2}u + v}, \quad z^* = -b^2 u + \frac{b^2 c}{\frac{c}{2}u + v}. \tag{8}$$

Da queste traesi:

$$\frac{x^*}{y^*} = -\operatorname{tg} u, \quad u = -\operatorname{arc\,tg}\frac{x^*}{y^*}$$

e quindi

$$z^* - b^2 \operatorname{arc\,tg}\frac{x^*}{y^*} = \frac{b^2 c}{\frac{c}{2}u + v};$$

d'altra parte, essendo

$$x^{*2} + y^{*2} = \frac{b^6}{\left(\frac{c}{2}u + v\right)^2},$$

si deduce l'equazione esplicita della trasformata:

$$x^{*2} + y^{*2} = \frac{b^2}{c^2}\left(z^* - b^2 \operatorname{arc\,tg}\frac{x^*}{y^*}\right)^2. \tag{9}$$

Questa superficie è una elicoide le generatrici della quale si appoggiano all'asse delle z^* e risulta immediatamente che essa è deformabile nello stesso iperboloide della (1).

Si fissi ora, nelle (8), il fattore ρ di proporzionalità in modo che ξ^*, η^*, ζ^* siano i coseni direttori normalizzati della normale della superficie (9); basta a tale scopo ed è necessario imporre la condizione

$$x_u^* = \begin{vmatrix} \eta^* & \zeta^* \\ \eta_u^* & \zeta_u^* \end{vmatrix}$$

ossia

$$x_u^* = -\frac{b^2}{\rho^2} x_u$$

che dà

$$\rho = \zeta.$$

Conseguentemente si ottiene

$$(10) \quad \xi^* = b \cos u - \frac{bc \operatorname{sen} u}{\frac{c}{2} u + v}, \quad \eta^* = b \operatorname{sen} u + \frac{bc \cos u}{\frac{c}{2} u + v}, \quad \zeta^* = \frac{b^2}{\frac{c}{2} u + v}$$

espressioni le quali, con notazione analoga alla (2), possono porsi sotto la solita forma tipica con

$$(11) \quad f_1^*(u) = \frac{bc \operatorname{sen} u}{2}, \quad f_2^*(u) = -\frac{bc \cos u}{2}, \quad f_3^*(u) = -\frac{b^2}{2}, \quad \varphi(u) = \frac{c}{2} u.$$

4. Le formule di applicabilità della (1) nella (9) si scrivono subito sostituendo, in quelle generali da me date [1], alle funzioni ω, ϑ, φ che in esse compariscono le espressioni che queste funzioni hanno effettivamente nel caso in esame, cioè, come si stabilisce facilmente:

$$\omega = -b, \quad \vartheta = -\frac{c}{2} u, \quad \varphi = \frac{c}{2} u.$$

Chiamando ora u_1, v_1 i parametri sulla (9), queste formule di applicabilità sono:

$$u = \frac{u_1}{b} + h, \quad v = \frac{b}{\frac{c}{2}\left(\frac{u_1}{b} + h\right) + v_1} - \frac{c}{2}\left(\frac{u_1}{b} + h\right),$$

h essendo un parametro che le formule devono contenere, come è naturale, trattandosi di superficie deformabili in una di rotazione.

(1) Cfr. loc. cit. (1).

Come una verifica di applicabilità si osservi che, in virtù delle formule precedenti, si ha:

$$S\xi^2 = b^2 + \zeta^2 = b^2 + \left(\frac{c}{2}u + v\right)^2 = b^2 + \frac{b^2}{\left[\frac{c}{2}\left(\frac{u_1}{b} + h\right) + v_1\right]^2} =$$

$$= b^2 + \frac{b^2}{\left[\frac{c}{2}u + v_1\right]^2} = b^2 + \frac{b^2(b^2 + c^2)}{\left[\frac{c}{2}u + v_1\right]^2} = S\xi^{*2}.$$

5. Poichè le superficie (1) e (9) sono polari nel sistema nullo considerato, esse sono le falde focali di una congruenza rettilinea *W*. Si osservi che se $(0, 0, a)$ sono le coordinate plückeriane pure di un piano (parallelo al piano $z = 0$), il polo di questo ha ha per coordinate plückeriane pure $\left(0, 0, -\frac{1}{a}\right)$ cioè ogni piano perpendicolare all'asse delle z sega quest'asse nel suo polo.

Ne consegue che l'asse delle z è l'asse del complesso lineare che, con le notazioni solite della geometria della retta, ha per equazione

$$p_{12} - b^2 p_{34} = 0$$

e corrisponde al sistema nullo dianzi considerato. Ne viene che le deformazioni infinitesime delle superficie (1) e (9), associate alla congruenza *W* che le ammette come falde focali, sono movimenti elicoidali attorno all'asse delle z. Conformemente allora ad una mia recente osservazione [1], se si assoggetta la (9) ad una rotazione di π radianti attorno a questo asse, essa, nella nuova posizione, e la (1) sono le falde focali di un'altra congruenza *W*. Detti $\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$, $\bar{\zeta}$ i coseni normalizzati della (9) dopo la rotazione si ha:

$$\bar{\xi} = -\xi^*, \quad \bar{\eta} = -\eta^*, \quad \bar{\zeta} = \zeta^*$$

e per le (7), (10) risulta:

$$S\xi\,\xi^* = 2b^2, \quad S\xi\,\bar{\xi} = 0$$

talmente che la nuova congruenza ottenuta è normale. Peraltro la (9), situata nella nuova posizione, si sarebbe ottenuta diret-

[1] Cfr. P. Tortorici, *Sulla trasformazione integrale di Moutard.* Boll. U. M. I., n. 5, dicembre 1926.

tamente dalla (1) per trasformazione mediante il sistema nullo corrispondente alla sostituzione lineare:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^2 \\ 0 & 0 & -b^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ma poichè la (1), come risulta dalla sua equazione, è simmetrica rispetto all'asse delle z, essa dopo la rotazione torna in sè stessa e però si conclude che le superficie (1) e (10), pur restando nella stessa posizione relativa, possono porsi in due maniere diverse in corrispondenza di trasformazione asintotica.

È superfluo infine avvertire che ai medesimi risultati si sarebbe pervenuti attraverso la teoria classica delle congruenze W come del resto mette in luce, con le notazioni usuali, la espressione della funzione trasformatrice:

$$R = \varphi(u) + v = \frac{c}{2} u + v = \zeta.$$

Palermo, febbraio 1927.