Bollettino Unione Matematica Italiana

Angelo Tonolo

Sulla chiusura del sistema di funzioni $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}$, $\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ nell'intervallo $(0, 2\pi)$

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.3, p. 121–123.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_3_121_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1927.

Sulla chiusura del sistema di funzioni $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ nell'intervallo $(0, 2\pi)$.

Nota di ANGELO TONOLO (a Padova).

Il prof. VITALI nella Nota: *Sulla condizione di chiusura di un sistema di funzioni ortogonali* (Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. XXX, serie 5ª, 2° sem., 1921), dimostra che, se

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \varphi_3(x), \ldots \tag{1}$$

è un sistema normale e ortogonale di funzioni definite in un intervallo (a, b) sommabili insieme ai loro quadrati la condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema (1) sia chiuso, è che per ogni x di (a, b) si abbia:

$$x - a = \sum_1^\infty {}_i \left[\int_a^x \varphi_i(x) dx \right]^2. \tag{2}$$

Egli ha poi applicato questo criterio alla dimostrazione della chiusura del sistema di funzioni normali e ortogonali nell'intervallo $(0, 2\pi)$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{1'}$$

Il prof. VITALI fa vedere che per il sistema (1'), la relazione (2) si riduce alla seguente:

$$\sum_1^\infty {}_n \frac{2 \cos nx}{n^2} = \frac{x^2}{2} - \pi x + \frac{\pi^2}{2}. \tag{3}$$

E poichè il primo membro della (3) è proprio la serie di FOURIER della funzione che figura nel secondo membro, la chiusura del sistema (1') sarà provata, se si dimostrerà che la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - \pi x + \frac{\pi^2}{2} \tag{4}$$

è la somma del corrispondente sviluppo in serie di FOURIER in $(0, 2\pi)$.

Ora ciò si vede rapidamente nel modo che segue: Intanto proviamo che per la funzione (4) si ha:

$$\int_0^{2\pi} \overline{f(x)}^2 dx = \sum_0^\infty {}_n a_n^2,$$

ove

$$a_n = \frac{2\sqrt{\pi}}{n^2}.$$

Infatti, come facilmente si riconosce,

$$\int_0^{2\pi} \overline{f(x)}^2 dx = \frac{2\pi^5}{45}.$$

Inoltre:

$$\sum_1^\infty {}_n a_n^2 = \sum_1^\infty {}_n \left(\frac{2\sqrt{\pi}}{n^2}\right)^2 = 4\pi \sum_1^\infty {}_n \frac{1}{n^4}.$$

Ma (¹)

$$\sum_1^\infty {}_n \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

Quindi anche

$$\sum_1^\infty {}_n a_n^2 = \frac{2\pi^5}{45}.$$ c. d. d.

Concludiamo che la serie

(5) $$\sum_1^\infty \frac{2 \cos nx}{n^2}$$

converge in media verso la funzione $f(x)$. D'altra parte i termini di questa serie sono funzioni continue, ed essa è totalmente convergente, perchè i suoi termini non superano in valore assoluto i corrispondenti termini positivi della serie convergente

$$\sum_1^\infty {}_n \frac{1}{n^2}.$$

La serie (5) converge allora nell'intervallo $(0, 2\pi)$ verso una funzione continua che diremo — per il momento — $\psi(x)$. Ma per

(¹) Ved. p. es.: E. Cesaro, *Corso di Analisi algebrica* (Fratelli Bocca, Torino), XXIV. pag. 143.

la già dimostrata convergenza in media della serie (5) in $(0, 2\pi)$, associando convenientemente i suoi termini, possiamo renderla convergente generalmente verso la funzione $f(x)$. Allora, in $(0, 2\pi)$ la differenza $f(x) - \psi(x)$ è funzione continua, e generalmente nulla: perciò essa è nulla in ogni punto dell'intervallo $(0, 2\pi)$. Quindi, essendo $f(x) = \psi(x)$, la serie (5) converge verso $f(x)$ in $(0, 2\pi)$, c. d. d. (1).

(1) Il criterio di chiusura del prof. VITALI è stato recentemente ritrovato dal sig. J. TAMARKIN nella Nota: *A new proof of Parseval's identity for trigonometric functions* (Annals of Mathematics, Vol. 27, Second Series, n. 4, 1926).