Bollettino Unione Matematica Italiana

Leonida Tonelli

Sulla chiusura del sistema di funzioni di Fourier

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.3, p. 123–126.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_3_123_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1927.

Sulla chiusura del sistema di funzioni di Fourier.

Nota di LEONIDA TONELLI (a Bologna).

La Nota del prof. TONOLO, sulla chiusura del sistema di funzioni di FOURIER

$$(1) \qquad 1, \quad \cos x, \quad \operatorname{sen} x, \ldots, \quad \cos nx, \quad \operatorname{sen} nx, \ldots,$$

mi induce a pubblicare la dimostrazione che di questa chiusura diedi alcuni anni fa nelle mie lezioni di Analisi superiore. Tale dimostrazione è del tutto elementare e non fa ricorso nè al teorema del VITALI nè al concetto di convergenza in media, che il TONOLO utilizza; ed è anche indipendente dalla teoria delle serie di FOURIER. In essa viene usata, con un conveniente adattamento, un'osservazione già sfruttata dal SEVERINI per la dimostrazione della chiusura del sistema 1, x, x^2,... x^n,....

Vogliamo dunque provare che *ogni funzione $f(x)$, integrabile (intenderemo sempre nel senso del Lebesgue) nell'intervallo* $(0, 2\pi)$ *e soddisfacente alle infinite uguaglianze*

$$(2) \qquad \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx = 0,$$
$$n = 0, \quad 1, \quad 2, \ldots,$$

è nulla quasi dappertutto.

Proviamo, innanzi tutto, che, se esiste una funzione $f(x)$ integrabile, soddisfacente alle (2) e non nulla quasi dappertutto in $(0, 2\pi)$, esiste anche una funzione $\Phi(x)$, continua in tutto $(0, 2\pi)$, soddisfacente alle (2) e non identicamente nulla. Ed infatti, posto

$$\Phi(x) = c + \int_0^x f(x)dx \tag{3}$$

con

$$c = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left\{\int_0^x f(x)dx\right\}dx,$$

abbiamo, in primo luogo,

$$\int_0^{2\pi}\Phi(x)dx = 0.$$

Abbiamo poi, osservando che, per la prima delle (2), è $\Phi(0) = \Phi(2\pi) = c$, e integrando per parti

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx = n\int_0^{2\pi}\Phi(x)\,\mathrm{sen}\,nxdx,$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{sen}\,nxdx = -n\int_0^{2\pi}\Phi(x)\cos nxdx,$$

e ciò prova che la $\Phi(x)$, come la $f(x)$, è una soluzione del sistema (2). La $\Phi(x)$ non è poi identicamente nulla, perchè, se lo fosse, dalla (3) risulterebbe $f(x) = 0$ quasi dappertutto in $(0, 2\pi)$.

Dopo di ciò, basta dimostrare che il sistema (2) non ammette soluzioni continue non identicamente nulle. Si supponga che esista una tale soluzione, e ripetendo un ragionamento già fatto dal Lebesgue, si consideri un intervallo (a, b), interno a $(0, 2\pi)$, in cui la $f(x)$ conservi un segno costante, senza mai annullarsi. Sia, per fissare le idee, $f(x) > m > 0$ in (a, b), e indichiamo con M il massimo modulo della $f(x)$ in tutto $(0, 2\pi)$. Poniamo

$$\varphi(x) = 1 + \cos\left(x - \frac{a+b}{2}\right) - \cos\frac{b-a}{2},$$

e consideriamo la potenza $\varphi^n(x)$, con n intero > 0. Poichè la $\varphi(x)$ è > 1 in ogni punto interno ad (a, b), e in modulo ≤ 1 in tutti gli altri punti di $(0, 2\pi)$, se indichiamo con (α, β) un intervallo *interno* a (a, b), $\varphi(x)$ resta maggiore di un $l > 1$ in tutto (α, β) e perciò, in tale intervallo, è $\varphi^n(x) > l^n$. È dunque

$$\int_a^b f(x)\varphi^n(x)dx > \int_\alpha^\beta f(x)\varphi^n(x)dx > ml^n(\beta-\alpha),$$

e siccome è

$$\left|\int_0^a f(x)\varphi^n(x)dx\right| + \left|\int_b^{2\pi} f(x)\varphi^n(x)dx\right| < 2M\pi,$$

ne viene, per $n \to \infty$,

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\varphi^n(x)dx\right| \to +\infty. \tag{4}$$

Ma sviluppando $\varphi^n(x)$, otteniamo un polinomio in sen x e cos x, e quindi una funzione lineare di $\cos x$, $\cos 2x$,..., $\cos nx$, sen x, sen $2x$,..., sen nx:

$$\varphi^n(x) = \sum_{r=0}^{n} c_r \cos rx + \sum_{r=1}^{n} c_r' \operatorname{sen} rx,$$

onde

$$\int_0^1 f(x)\varphi^n(x)dx = \sum_0^n c_r \int_0^{2\pi} f(x) \cos rx dx + \sum_1^n c_r' \int_0^{2\pi} f(x) \operatorname{sen} rx dx$$

e tutti i termini di questa somma sono nulli perchè la $f(x)$ è supposta soluzione del sistema (2). Ciò contraddice alla (4).

Osserviamo che, dimostrata la chiusura del sistema (1) relativamente all' intervallo $(0, 2\pi)$, risulta dimostrata la chiusura anche relativamente ad ogni intervallo (a, b) contenuto in $(0, 2\pi)$. Ed infatti, se esistesse una funzione $f(x)$, integrabile e non quasi dappertutto nulla in (a, b), e soddisfacente al sistema

$$\int_a^b f(x) \cos nx dx = 0, \qquad \int_a^b f(x) \operatorname{sen} nx dx = 0,$$

$$n = 0, 1, 2...,$$

la funzione $f_1(x)$, coincidente con la $f(x)$ in (a, b) e nulla altrove, sarebbe una soluzione del sistema (2) non quasi dappertutto nulla in $(0, 2\pi)$. Così si ha anche la chiusura del sistema (1) in ogni intervallo (a, b) tale che $0 < b - a \leq 2\pi$. Per $b - a > 2\pi$ non può dirsi altrettanto. Se, per esempio, consideriamo l'intervallo $(0, 4\pi)$, il sistema

$$\int_0^{4\pi} f(x) \cos nx dx = 0, \qquad \int_0^{4\pi} f(x) \operatorname{sen} nx dx = 0,$$

$$n = 0, 1, 2, \ldots,$$

ammette almeno le due soluzioni $f(x) = \operatorname{sen} \frac{x}{2}$, $f(x) = \cos \frac{x}{2}$.