
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LEONIDA TONELLI

Un'osservazione su di un teorema di Sturm

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 6 (1927), n.3, p. 126–128.

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_3_126_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_3_126_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)*

SIMAI & UMI

<http://www.bdim.eu/>

Un'osservazione su di un teorema di Sturm.

Nota di LEONIDA TONELLI (a Bologna).

Intendo di riferirmi al seguente teorema di STURM: « Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono due integrali particolari dell'equazione differenziale

$$(1) \quad y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,$$

non identicamente nulli in (a, b) e fra loro linearmente indipendenti, e se x_1 e x_1' sono due zeri consecutivi di $y_1(x)$, contenuti in (a, b) , fra x_1 e x_1' vi è uno zero ed uno solo di $y_2(x)$ ». Le funzioni $p(x)$ e $q(x)$ si suppongono continue in (a, b) .

Di questo teorema ho dato, nel vol. II dei miei *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni* (1), una dimostrazione che mi sembra più semplice delle altre già conosciute, e che, in sostanza, è la seguente:

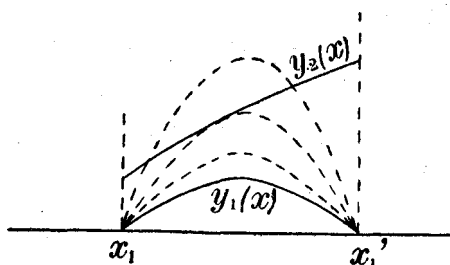
Osservato che, per l'indipendenza lineare di y_2 da y_1 , y_2 non può annullarsi nè in x_1 , nè in x_1' , si può affermare che, se y_2 non si annulla in nessun punto interno a (x_1, x_1') , esso ha, in tale intervallo, un segno costante, che, per fissare le idee, supporremo positivo, e in tutto (x_1, x_1') y_2 resta maggiore di un numero $m > 0$. Consideriamo allora, in (x_1, x_1') , il fascio degli integrali

$$(2) \quad y = c |y_1(x)|,$$

dove c è una costante positiva. Per $c = 0$, l'integrale (2) resta, in tutto (x_1, x_1') , al disotto di $y = y_2(x)$. Per c sufficientemente grande, in qualche punto di (x_1, x_1') l'integrale (2) è al disopra di $y = y_2(x)$. Perciò, se facciamo crescere c con continuità, da 0 all' ∞ , dovremo

(1) Pag. 217.

trovare un valore di c tale che per esso l'integrale (2) tocchi $y = y_2(x)$ in un punto x interno a (x_1, x_1') . Ma ciò è impossibile, perchè per un punto $(x, y_2(x))$ e con una data direzione passa un solo inte-



grale della (1). Dunque y_2 si annulla in un punto interno a (x_1, x_1') . Che poi non possa annullarsi in più di un punto, si vede immediatamente nel modo solito.

Questa dimostrazione è fondata solamente sui due fatti seguenti:

- 1°) l'equazione (1) è omogenea; ciò che permette di dire che il fascio delle curve (2) è un fascio di integrali della (1);
- 2°) vale, per la (1), il teorema di unicità della soluzione, per un punto con data direzione.

Pertanto, ammesse queste due proprietà, il teorema di STURM sussiste indipendentemente dal fatto che la (1) sia un'equazione lineare. Possiamo dunque affermare:

Il teorema di Sturm, nella forma sopra indicata, vale per ogni equazione differenziale del 2° ordine, omogenea (rispetto ad y, y', y''), e tale che per essa sussista sempre (nella striscia $a \leq x \leq b$) il teorema di unicità.

Così, per esempio, il teorema di STURM vale per l'equazione

$$(y^2 + y'^2)y'' + p(x)y^3 = 0.$$

Le considerazioni precedenti mostrano che la proprietà espressa dal teorema di STURM risulta verificata anche se il teorema di unicità non vale per i punti dell'asse delle x , purchè si sappia che l'integrale y_2 non si annulla nè in x_1 nè in x_1' . Possiamo dunque enunciare la proposizione:

Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono due integrali non identicamente nulli di un'equazione differenziale del 2° ordine omogenea (rispetto ad y, y', y''), che ammette il teorema di unicità per tutti i punti della striscia $a \leq x \leq b$, ad eccezione al più di quelli posti sull'asse delle x , e se x_1 e x_1' sono

due zeri consecutivi di $y_1(x)$, contenuti in (a, b) e tali che $y_2(x_1) \neq 0$ e $y_2(x_1') \neq 0$, fra x_1 e x_1' vi è uno zero ed uno solo di $y_2(x)$.

Se $y_1(x)$ si annullasse in uno dei due punti x_1, x_1' , od anche in ambedue, nell'interno dell'intervallo (x_1, x_1') potrebbe esservi al più soltanto un altro zero di $y_2(x)$.

Se si ha, per esempio, l'equazione del 2° ordine, omogenea,

$$yy'' + p(x)y'^2 + p(x)y^2 = 0,$$

per essa vale il teorema di unicità, ad eccezione al più dei punti dell'asse delle x ; per essa vale perciò la proposizione sopra enunciata.

Quanto qui si è detto suggerisce altre generalizzazioni di note proposizioni relative alle equazioni differenziali lineari omogenee del 2° ordine.