Bollettino Unione Matematica Italiana

Enea Bortolotti

Spazi subordinati: equazioni di Gauss e Codazzi

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.3, p. 134–137.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_3_134_0>

Spazi subordinati: equazioni di Gauss e Codazzi.

Nota di ENEA BORTOLOTTI (a Bologna).

Voglio qui indicare una forma particolarmente semplice che può darsi alle equazioni di GAUSS e CODAZZI per una V_m in V_n (metrica), e che non mi risulta sia finora stata notata.

Mi valgo di una nozione introdotta da R. LAGRANGE [1], della quale questi pure si vale per lo studio di una V_m in V_n: la nozione di *differenziazione tensoriale di un tensore che dipenda da due (o più) serie di variabili.*

Sia ad es. $\xi^{r\rho}_{i\lambda}$ un tensore, le cui componenti siano funzioni sia delle n variabili x^i $(i, r, s, t, u = 1, 2, \dots, n)$, che delle m variabili y^λ $(\lambda, \mu, \rho, \tau, \omega = 1, 2, \dots, m)$. Supponiamo che pei tensori, funzioni delle x^i, si sia introdotto un calcolo differenziale assoluto (lineare), ponendo ad es.:

$$(1)\qquad \begin{cases} \bar{d}X^i = dX^i + \Gamma^{\ i}_{rs} X^r dx^s, \\ \bar{d}X_i = dX_i - \Gamma'^{\ r}_{is} X_r dx^s; \end{cases}$$

e pei tensori, funzioni delle y^λ, analogamente si sia posto

$$(2)\qquad \begin{cases} \bar{d}Y^\lambda = dY^\lambda + \gamma^{\ \lambda}_{\rho\tau} Y^\rho dy^\tau \\ \bar{d}Y_\lambda = dY_\lambda - \gamma'^{\ \rho}_{\lambda\tau} Y_\rho dy^\tau, \end{cases}$$

ove $\Gamma^{\ i}_{rs}$, $\Gamma'^{\ r}_{is}$ sono $2n^2$ funzioni arbitrarie delle x^i, e $\gamma^{\ \lambda}_{\rho\tau}$, $\gamma'^{\ \rho}_{\lambda\tau}$ sono $2m^2$ funzioni arbitrarie delle y^λ [2]. Ebbene: se poniamo, secondo LAGRANGE

$$(3)\qquad \bar{d}\xi^{r\rho}_{i\lambda} = d\xi^{r\rho}_{i\lambda} + \Gamma^{\ r}_{ts}\xi^{t\rho}_{i\lambda}dx^s - \Gamma'^{\ t}_{is}\xi^{r\rho}_{t\lambda}dx^s + \gamma^{\ \rho}_{\tau\mu}\xi^{r\tau}_{i\lambda}dy^\mu - \gamma'^{\ \tau}_{\lambda\mu}\xi^{r\rho}_{i\tau}dy^\mu,$$

il secondo membro si comporta come un tensore, e precisamente, come $\xi^{r\rho}_{i\lambda}$, per ogni trasformazione eseguita, sia sulle x^i, che sulle y^λ: lo prenderemo come *differenziale tensoriale* di $\xi^{r\rho}_{i\lambda}$. Risulta

[1] V. ad es. LAGRANGE, *Calcul différentiel absolu* (Paris, Gauthier-Villars, 1926), p. 10.

[2] soggette soltanto a trasformarsi, in un mutamento delle variabili, secondo certe formule, che generalizzano quelle di CHRISTOFFEL. (Ved. SCHOUTEN, *Der Ricci-Kalkül*, Berlin, Springer, 1924, p. 65).

ovvia l'estensione al caso di un *qualunque* tensore dipendente dalle x^i e dalle y^λ.

Se supponiamo che sia $m = n$, e che le x^i siano funzioni *invertibili* delle y^λ, potremo ricavare dalla (3) la *derivata* covariante di $\xi^{r\rho}_{i\lambda}$ sia rispetto ad x^s, che rispetto ad y^μ: posto

$$\frac{\partial x^i}{\partial y^\lambda} = \theta^i_\lambda, \quad \frac{\partial y^\lambda}{\partial x^i} = \theta^\lambda_i, \tag{4}$$

abbiamo

$$\nabla_s \xi^{r\rho}_{i\lambda} = \frac{\partial \xi^{r\rho}_{i\lambda}}{\partial x^s} + \Gamma^{\ r}_{ts}\, \xi^{t\rho}_{i\lambda} - \Gamma'^{\ t}_{is}\, \xi^{r\rho}_{t\lambda} + \gamma^{\ \rho}_{\tau\mu}\, \xi^{r\tau}_{i\lambda}\theta^\mu_s - \gamma'^{\ \tau}_{\lambda\mu}\, \xi^{r\rho}_{i\tau}\theta^\mu_s, \tag{5}$$

e analogamente

$$\nabla_\mu \xi^{r\rho}_{i\lambda} = \frac{\partial \xi^{r\rho}_{i\lambda}}{\partial y^\mu} + \Gamma^{\ r}_{ts}\, \xi^{t\rho}_{i\lambda}\theta^s_\mu - \Gamma'^{\ t}_{is}\, \xi^{r\rho}_{t\lambda}\theta^s_\mu + \gamma^{\ \rho}_{\tau\mu}\xi^{r\tau}_{i\lambda} - \gamma'^{\ \tau}_{\lambda\mu}\xi^{r\rho}_{i\tau}; \tag{6}$$

essendo naturalmente

$$\nabla_s \xi^{r\rho}_{i\lambda} = \nabla_\mu \xi^{r\rho}_{i\lambda}\theta^\mu_s, \quad \text{e} \quad \nabla_\mu \xi^{r\rho}_{i\lambda} = \nabla_s \xi^{r\rho}_{i\lambda}\theta^s_\mu.$$

Se invece è, ad es., $m < n$, e le x^i sono funzioni (non invertibili) delle y^μ, soltanto le (6) hanno un senso.

Ciò posto: siano le x^i coordinate curvilinee in V_n, le y^μ, coordinate in una V_m immersa in V_n. Avremo, lungo V_m, $x^i = x^i(y^\mu)$; poniamo ancora $\frac{\partial x^i}{\partial y^\mu} = \theta^i_\mu$. Limitiamoci per semplicità (per quanto ciò non sia essenziale) al caso di due *varietà riemanniane*: si ha allora

$$\Gamma^{\ i}_{rs} = \Gamma'^{\ i}_{rs} = \left\{ {rs \atop i} \right\}_a, \quad \gamma^{\ \lambda}_{\rho\tau} = \gamma'^{\ \lambda}_{\rho\tau} = \left\{ {\rho\tau \atop \lambda} \right\}_b, \tag{7}$$

ove i simboli di Christoffel contrassegnati con gli indici a, b, si intendono calcolati in V_n e in V_m, rispettivamente. Allora detti $\Omega^{\cdot\cdot r}_{\lambda\mu}$ (secondo Bompiani) i coefficienti del *tensore di curvatura* della V_m in V_n, abbiamo semplicemente

$$\nabla_\mu \theta^r_\lambda = \Omega^{\cdot\cdot r}_{\mu\lambda}, \tag{8}$$

ove la derivata covariante ∇_μ s'intende calcolata nel modo indicato poco sopra (secondo Lagrange).

Le equazioni di GAUSS e CODAZZI per la V_m in V_n sono le condizioni di integrabilità delle (8), e si vede agevolmente che esse si scrivono

$$(9)\qquad \nabla_\lambda \Omega_{\mu\omega}^{\cdot\cdot r} - \nabla_\mu \Omega_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot r} = \overset{a}{R}{}_{stu}^{\cdot\cdot\cdot r}\,\theta^s_\mu\theta^t_\lambda\theta^u_\omega + \overset{b}{R}{}_{\mu\lambda\omega}^{\cdot\cdot\cdot\nu}\,\theta^r_\nu,$$

ove $\overset{a}{R}{}_{stu}^{\cdot\cdot\cdot r}$, $\overset{b}{R}{}_{\mu\lambda\omega}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$ sono i *tensori di* RIEMANN-CHRISTOFFEL di V_n e di V_m.

Quest' unico gruppo di equazioni (9), ove al solito ∇_λ va calcolato al modo di LAGRANGE per $\Omega_{\mu\omega}^{\cdot\cdot r}$, riassume le equazioni di GAUSS e CODAZZI. Per ricavare queste ultime, nella forma usuale, dalle (9), non v' è che seguire un procedimento analogo a quello che segue, in analoghe circostanze, nel caso molto particolare di una V_2 in R_3 euclideo, il BIANCHI nella sua *Geometria differenziale* (vol. I, pag. 172). Siano a_{rs}, $b_{\lambda\mu}$ i tensori fonsori fondamentali di V_n e di V_m. È noto che si può sempre porre $\Omega_{\lambda\nu}^{\cdot\cdot r} = \sum_{1}^{n-m}{}_j \overset{j}{\omega}_{\lambda\nu}\overset{j}{X}{}^r$, ove le $\overset{j}{\omega}_{\lambda\nu}$ sono le forme fondamentali (del 2° grado) della V_m rispetto ad $n-m$ normali, due a due ortogogonali, $\overset{j}{X}{}^r$ $(j=1, 2,\ldots, n-m)$ di V_m in V_n. Ciò posto: dalle (9) moltiplicando per $a_{rs}\,\theta^s_\alpha$ (e sommando rispetto ad r, s) otteniamo le equazioni di GAUSS generalizzate

$$(10)\qquad \Sigma_j\left(\overset{j}{\omega}_{\lambda\nu}\,\overset{j}{\omega}_{\mu\alpha} - \overset{j}{\omega}_{\mu\nu}\,\overset{j}{\omega}_{\lambda\alpha}\right) = \overset{a}{R}_{ltus}\theta^l_\mu\theta^t_\lambda\theta^u_\nu\theta^s_\alpha - \overset{b}{R}_{\mu\lambda\nu\alpha};$$

moltiplicando invece per $a_{rs}\overset{l}{X}{}^s$ e sommando, abbiamo, posto

$$(11)\qquad a_{rs}\theta^q_\mu\overset{l}{X}{}^s\nabla_q\overset{j}{X}{}^r = \overset{jl}{v}_\mu,$$

le equazioni generalizzate di CODAZZI, (nella forma ordinaria, non del tutto soddisfacente, perchè contiene degli elementi estranei, le $\overset{jl}{v}_\mu$, che sono anche soggette a certe condizioni differenziali),

$$(12)\qquad \nabla_\lambda\overset{l}{\omega}_{\mu\nu} - \nabla_\mu\overset{l}{\omega}_{\lambda\nu} - \Sigma_j\left(\overset{j}{\omega}_{\lambda\nu}\overset{jl}{v}_\mu - \overset{j}{\omega}_{\mu\nu}\overset{jl}{v}_\lambda\right) = \overset{a}{R}_{ptus}\theta^p_\mu\theta^t_\lambda\theta^u_\nu\overset{l}{X}{}^s \text{ [1]}.$$

[1] Ved. ad es. SCHOUTEN: *Der Ricci-Kalkül*, Berlin, Springer 1924, pp. 198-200; oppure EISENHART: *Riemannian Geometry*, Princeton, 1926, p. 162.

Forma in qualche modo analoga alle (9) hanno certe relazioni ricavate sia dal LAGRANGE stesso [1], sia dal WEYL [2]: ma i sistemi di riferimento di V_m e V_n ivi si suppongono collegati in modo particolare, mentre qui essi sono del tutto indipendenti l'uno dall'altro: le (9) essendo covarianti per ogni trasformazione di coordinate sia in V_m che in V_n.

Se V_m e V_n sono, più in generale, varietà a connessione metrica qualunque, ed $\overset{a}{R}{}_{stu}^{\cdot\cdot\cdot r}$, $\overset{b}{R}{}_{\mu\lambda\omega}^{\cdot\cdot\cdot\nu}$; $\overset{a}{S}{}_{st}^{\cdot\cdot r}$, $\overset{b}{S}{}_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\nu}$ ne sono i tensori di curvatura e di torsione (secondo CARTAN), le condizioni d'integrabilità delle (8) sono:

$$\nabla_\lambda \Omega_{\mu\omega}^{\cdot\cdot r} - \nabla_\mu \Omega_{\lambda\omega}^{\cdot\cdot r} = \overset{a}{R}{}_{stu.}^{\cdot\cdot\cdot r}\, \theta_\mu^s \theta_\lambda^t \theta_\omega^u + \overset{b}{R}{}_{\mu\lambda\omega}^{\cdot\cdot\cdot\nu}\, \theta_\nu^r + 2\overset{b}{S}{}_{\mu\lambda}^{\cdot\cdot\nu}\, \Omega_{\nu\omega}^{\cdot\cdot r}. \tag{13}$$

Si noti in particolare che in queste equazioni non figurano le componenti $\overset{a}{S}{}_{st}^{\cdot\cdot r}$ del tensore di torsione della varietà ambiente.

[1] LAGRANGE: l. c., p. 35.

[2] WEYL: *Zur Infinitesimalgeometrie: p dimensionale Fläche im n dimensionalen Raum* (Math. Zeitschrift, Bd. 12, 1922, pp. 154-160) p. 158.