BEPPO LEVI

Sulla relazione $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{\pi i}{2}$ nella teoria delle funzioni ellittiche

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.3, p. 137–141.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_3_137_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1927.

Sulla relazione $\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{\pi i}{2}$ nella teoria delle funzioni ellittiche.

Nota di BEPPO LEVI (a Parma).

Nella trattazione della teoria delle funzioni ellittiche secondo WEIERSTRASS si stabilisce abitualmente la relazione fondamentale

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = \frac{\pi i}{2} \tag{1}$$

mediante un'integrazione lungo un parallelogramma dei periodi [3]: è chiaro però che questo modo di procedere rompe la purezza del metodo algebrico che caratterizza l'esposizione del WEIERSTRASS. Il quale infatti segue altra via, limitandosi in un primo tempo a stabilire, mediante un calcolo semplicissimo (e noto) la verità della (1) quando nel 2° membro si ponga un multiplo indetermi-

(3) Cfr., per es., BIANCHI: *Lezioni sulla teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche.* Pisa, Spoerri, 1916, pag. 291.

nato dispari di $\frac{\pi i}{2}$ (1), mentre solo più tardi (2) egli riesce a stabilire il valore esatto 1 del coefficiente di moltiplicità, mediante un calcolo alquanto laborioso. Non mi è noto che sia stata indicata altrove via più semplice (3), ed è perciò che credo non inutile esporre brevemente quella che segue.

1. Premettiamo il

Lemma. — *Se una funzione analitica* $\varphi(z)$ *esiste ed è regolare in una corona circolare di centro* $z=0$ *e di raggi* $\rho' < \rho''$, *e soddisfa ad una relazione della forma*

$$\varphi(q^s z) = Cz^m \varphi(z) \tag{2}$$

con $\frac{\rho'}{\rho''} < |q| < 1$, $s > 0$, *è certamente* $m < 0$, *ovvero* $m = 0$ *e* $\varphi(z)$ *si riduce ad un monomio*: $\varphi(z) = a_r z^r$.

Supponiamo invero scritto lo sviluppo di LAURENT della $\varphi(z)$ nella supposta corona circolare, e sia

$$\varphi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_i z^i. \tag{3}$$

La relazione (2) dà

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} a_i q^{si} z^i = \sum_{-\infty}^{+\infty} C a_i z^{i+m} = \sum_{-\infty}^{+\infty} C a_{i-m} z^i$$

Supponendo $|z|$ sufficentemente prossimo a ρ'' si può fare in modo che z e $q^s z$ siano entrambi interni alla corona di esistenza di $\varphi(z)$; allora la prima e l'ultima serie debbono essere identiche e deve perciò essere

$$a_{i-m} = a_i q^{si} C^{-1}.$$

Questa relazione è senz'altro assurda se $m=0$, a meno che $\varphi(z)$ sia della forma $\varphi(z) = a_r z^r$, perchè dà $q^{si} = C$, costante al variare di i, e quindi $|q| = 1$. Per $m \neq 0$, si ottiene per induzione

$$a_{i-km} = a_i q^{ksi - \frac{k(k-1)}{2} sm} C^{-k}$$

(k intero, positivo negativo o nullo).

(1) Cfr. WEIERSTRASS: *Vorlesungen u. d. Th. der elliptischen Functionen*. Werke, Bd. V, pag. 73; anche BIANCHI, l. c., in nota.

(2) WEIERSTRASS, l. c., pag. 130.

(3) Sempre, naturalmente, nell'ordine di idee indicato.

Sostituendo in (3) risulta

$$\varphi(z) = \sum_{i=0}^{i=|m|-1} a_i z^i \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \left(z^m q^{si - \frac{k-1}{2} sm} C^{-1}\right)^k.$$

Entro la corona circolare d'esistenza della $\varphi(z)$ ciascuna delle serie

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \left(z^m q^{si - \frac{k-1}{2} sm} C^{-1}\right)^k \tag{4}$$

deve essere assolutamente convergente. Poniamo

$$z = |q|^{\zeta + \eta\sqrt{-1}} \qquad C = |q|^{\gamma + \varepsilon\sqrt{-1}}, \qquad q^s = |q|^{\sigma + \tau\sqrt{-1}}$$

la (4) si scrive

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |q|^{\left(m\zeta + \sigma i - \frac{h-1}{2} \sigma m - \gamma\right) k + \left(m\eta + \tau i - \frac{k-1}{2} \tau m - \varepsilon\right) k\sqrt{-1}}$$

e, a causa di $|q| < 1$, non può essere assolutamente convergente se non quando, per k sufficentemente elevato in valore assoluto, sia costantemente

$$\left(m\zeta + \sigma i - \frac{k-1}{2} \sigma m - \gamma\right) k > 0$$

ossia

$$m\left(\zeta - \frac{k-1}{2} \sigma\right) + \sigma i - \gamma > 0 \quad \text{per} \quad k > 0$$

$$m\left(\zeta + \frac{|k|+1}{2} \sigma\right) + \sigma i - \gamma < 0 \quad \text{per} \quad k < 0.$$

Si vede subito che queste disuguaglianze cessano di essere verificate, per $|k|$ sufficentemente elevato, se $m > 0$; se invece $m < 0$ esse si verificano entrambe, da un certo valore di $|k|$ in poi, nella forma forte, in cui al 2° membro si sostituisca $\pm \delta$ ($\delta > 0$ arbitrario), il che assicura la convergenza assoluta della serie (4). E ciò qualunque sia $\zeta + \eta\sqrt{-1}$, purchè finito: la serie (3) è allora convergente in tutto il piano, fatta eccezione per i punti $z = 0$ e $z = \infty$.

2. Basta ora raccogliere alcuni elementi sostanzialmente noti per dedurre dal lemma dimostrato la relazione (1). Si sa invero che la funzione

$$f(x) = e^{\frac{\pi i x - \eta_1 x^2}{2\omega_1}} \sigma(x)$$

dove σ è la nota funzione di WEIERSTRASS, è periodica con periodo $2\omega_1$, e soddisfa all'equazione

$$f(x + 2\omega_2) = e^{-2\frac{\omega_2}{\omega_1}(\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1) + 2\frac{\pi i}{2}\frac{\omega_2}{\omega_1} + \pi i} \, e^{-2\frac{\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1}{\omega_1} x} fx$$

$$= e^{-\pi i \frac{\omega_2}{\omega_1}(l - 1) + \pi i} \, e^{\frac{-\pi i x}{\omega_1} l} fx ,$$

avendo posto

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega_1 = l \frac{\pi i}{2}.$$

Essa è d'altronde funzione intera, per cui, ponendo

$$e^{\frac{\pi i x}{\omega_1}} = z \qquad e^{\frac{\pi i \omega_2}{\omega_1}} = q$$

$$f(x) = \varphi(z),$$

si definisce una funzione $\varphi(z)$ regolare in tutto il piano, fatta eccezione per i punti $z = 0$ e $z = \infty$, soddisfacente alla relazione

$$\varphi(q^2 z) = q^{-(l - 1) + \frac{\omega_1}{\omega_2}} z^{-l} \varphi(z).$$

Poichè si possono notoriamente ordinare i periodi in modo che risulti $|q| < 1$, il nostro lemma ci dice allora che $l \geq 1$.

D' altra parte la funzione

$$\psi(z) = \prod_0^{+\infty}(1 - q^{2n}z) \prod_1^{\infty}(1 - q^{2n}z^{-1})$$

soddisfa alla relazione

$$\psi(q^2 z) = -\psi(z) z^{-1} = q^{\frac{\omega_1}{\omega_2}} z^{-1} \psi(z)$$

ed ha gli stessi zeri semplici di $\varphi(z)$, per cui la funzione

$$\Phi(z) = \frac{\psi(z)}{\varphi(z)}$$

è ancora regolare in tutto il piano, fatta eccezione per i punti $z=0$ e $z=\infty$ e soddisfa alla relazione

$$\Phi(q^2z)=q^{l-1}z^{l-1}\Phi(z).$$

Ma, essendosi già trovato $l\geq 1$, questa relazione risulta in contraddizione col nostro lemma a meno che sia precisamente

$$l=1$$

$\Phi(z)$ riducendosi ad un monomio; poichè d'altronde l'ultima relazione si scrive allora

$$\Phi(q^2z)=\Phi(z),$$

questo monomio non può essere che una costante.

Si determina questa costante con considerazioni note (per es. da $\lim\limits_{z=0}\frac{\varphi(z)}{z}=1$) e si riesce al noto sviluppo di $f(x)$ o di $\sigma(x)$ in prodotto infinito.

Parma, 18 aprile 1927.