Bollettino Unione Matematica Italiana

Giulio Bisconcini

Sui valori medi di funzioni di una variabile casuale

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **6** (1927), n.3, p. 141–144.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_3_141_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1927.

Sui valori medi di funzioni di una variabile casuale.

Nota di GIULIO BISCONCINI (a Roma).

1. Sotto questo stesso titolo il prof. RAFFAELE CULTRERA pubblicò nel fascicolo di agosto-ottobre 1926 del « Giornale di Matematica finanziaria » alcuni risultati riguardanti il comportamento del valore medio di alcune speciali funzioni di una variabile casuale [1], derivandoli da una relazione dovuta al BOHLMANN relativa al valore medio del prodotto di due funzioni di una stessa variabile casuale. Mediante considerazioni di carattere affatto diverso, ai risultati del CULTRERA può essere data la più larga generalità. È ciò che mi propongo di fare in questa breve Nota.

2. Sia X una variabile casuale discontinua che possa assumere i soli valori:

$$x_1, \quad x_2, \ldots, \quad x_n \tag{1}$$

[1] Per notizie sulle variabili casuali e relativi valori medi si consulti il *Calcolo delle probabilità* del prof. GUIDO CASTELNUOVO, II Ed., Bologna, Zanichelli, vol. I, cap. III, nn. 20-21.

con rispettive probabilità

(2) $$p_1, \quad p_2, \ldots\ldots, \quad p_n,$$

tali che

(3) $$\sum_1^n p_i = 1.$$

Sia inoltre $f(x)$ una funzione univalente definita nell'intervallo cui appartengono i valori (1) e che ammetta, in questo intervallo, derivata seconda continua e diversa da zero. Con le stesse probabilità (2) la $f(x)$ assumerà i valori:

(4) $$y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2), \ldots\ldots, \quad y_n = f(x_n)$$

che potranno perciò considerarsi i valori della variabile casuale Y legata alla X dalla relazione:

$$Y = f(X).$$

Con $M[X]$ e $M[Y]$ indichiamo i valori medi delle due variabili casuali X e Y, cioè poniamo:

(5) $$M[X] = \sum_1^n p_i x_i, \quad M[Y] = \sum_1^n p_i y_i$$

la seconda delle quali può anche scriversi:

$$M[f(X)] = \Sigma\, p_i f(x_i).$$

Ci proponiamo di mostrare, in un caso particolarmente notevole, unico del resto, in cui, secondo me, si possa dire una parola decisiva, in quale relazione stanno i due numeri

$$M[f(X)], \quad f(M[X]).$$

3. Se, rispetto ad un sistema d'assi cartesiani, consideriamo i punti $P_i(x_i, y_i)$ le cui ordinate coincidono coi valori forniti dalle (4), risulta senz'altro che le due somme (5) sono le coordinate x_0, y_0 del punto G, baricentro di masse p_i concentrate nei punti P_i.

Infatti, per tale punto si avrebbe:

$$x_0 = \frac{\sum_1^n p_i x_i}{\sum_1^n p_i}, \quad y_0 = \frac{\sum_1^n p_i y_i}{\sum_1^n p_i},$$

e quindi, in base alla (3) e alle (5),

$$x_0 = M[X], \quad y_0 = M[Y].$$

4. Ciò premesso, si noti che, in base alla continuità della $f''(x)$ e al fatto ch'essa non si annulla nell'intervallo cui appartengono i valori (1), segue che $f''(x)$ deve in tutto il suddetto intervallo conservare sempre lo stesso segno. Ciò implica che la curva $y=f(x)$ volge, per tale intervallo, la sua concavità sempre allo stesso verso dell'asse y. Ne deriva che, supposta la successione (1) ordinata, per es. secondo il valore crescente delle x, il poligono $P_1P_2 \dots P_n$ che è inscritto nella curva risulta sempre convesso. Nel suo interno sarà quindi il baricentro G di cui s'è testè detto e la sua ordinata y_0 sarà maggiore o minore dell'ordinata del punto della curva avente la stessa ascissa x_0 di G, secondo che la curva risulterà essere concava rispetto al verso positivo dell'asse y o al verso opposto, cioè secondo che sarà positiva o negativa la $f''(x)$.

In conclusione avremo:

$$M[f(X)] > f(M[X] \quad \text{se} \quad f''(x) > 0,$$
$$M[f(X)] < f(M[M] \quad \text{»} \quad f''(x) < 0,$$

e così il teorema:

Ferme restando le ipotesi fatte sulla funzione f(x), *il valore medio di* f(X) *è maggiore o minore del valore che* f(x) *assume, quando ad* x *si sostituisce il valore medio di* X, *secondo che* f''(x) *è positiva o negativa.*

È quasi superfluo avvertire che tale teorema esprime una condizione soltanto sufficiente.

5. Se la successione (1) è ordinata per es. come è detto al n. prec., e, per fare una ipotesi, si suppone che la curva $y=f(x)$ valga la concavità al verso positivo dell'asse y, l'ordinata y_0 di G risulta minore dell'ordinata del punto della corda P_1P_n avente l'ascissa x_0. Tale ordinata è $\{(x_n - x_0)f(x_1) - (x_0 - x_1)f(x_n)\}/(x_n - x_1)$ e quindi si ha per $M[f(X)]$ la limitazione:

$$f(M[X]) < M[f(X)] < \frac{1}{x_n - x_1}\{(x_n - M[X])f(x_1) - (M[X] - x_1)f(x_n)\}.$$

Limitazione inversa si avrebbe se il verso della concavità fosse l'opposto

6. A titolo di esempio consideriamo qualche funzione particolare.

I. — Sia $y = x^n$, e si supponga $x > 0$.

Poichè $y'' = n(n-1)x^{n-2}$, risulta $y'' > 0$ per $n < 0$ e per $n > 1$

e $y'' < 0$ per $0 < n < 1$. Sarà quindi

$$M[X^n] > (M[X])^n \quad \text{se} \quad n < 0, \quad \text{e} \quad n > 1$$
$$M[X^n] < (M[X])^n \quad \text{»} \quad 0 < n < 1.$$

II. — Sia $y = a^x$, con $a > 0$.

Essendo $y'' = a^x \lg^2 a > 0$ è

$$M[a^X] > a^{M[X]}.$$

III. — Sia $y = \lg_a x$, con $x > 0$.

Avendosi:

$$y'' = -\frac{1}{x^2}\lg_a e \begin{cases} < 0 & \text{per} \quad a > 1 \\ > 0 & \text{»} \quad a < 1, \end{cases}$$

sarà

$$M[\lg_a X] < \lg_a M[X] \quad \text{se} \quad a > 1$$
$$M[\lg_a X] > \lg_a M[X] \quad \text{»} \quad a < 1.$$

7. Il teorema enunciato al n. 4 è suscettibile di generalizzazione se, in luogo della variabile casuale X, si suppone sostituita una funzione univalente $\varphi(X)$ della stessa variabile. Così si ha

$$M[f\{\varphi(X)\}] > f\{M[\varphi(X)]\} \quad \text{se} \quad f'' > 0,$$

l'opposto se $f'' < 0$.

Per considerare anche una sola applicazione, si supponga che $\varphi(x)$ sia positiva pei valori (1) e si noti che la funzione $\frac{1}{\varphi(x)}$, avente significato ben determinato in tutto il campo (1), è ciò cui si riduce $f\{\varphi(x)\}$ quando f si identifichi con x^{-1}. Ci troviamo allora nel I caso del n. prec. in cui $n = -1$ e si ha perciò:

$$M\left[\frac{1}{\varphi(X)}\right] > \frac{1}{M[\varphi(X)]}.$$

Roma, aprile 1927.