
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

UMI

Recensioni

- * Umberto Ricci: L'offerta del risparmio
- * Hilda P. Hudson: Cremona Transformations in plane and space
- * B. Courant u. D. Hilbert: Methoden der Mathematischen Physik, I
- * F. Klein Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 6 (1927), n.5, p. 285–293.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1927_1_6_5_285_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1927.

RECENSIONI

UMBERTO RICCI: *L'offerta del risparmio* (« Giornale degli economisti e Rivista di statistica », febbraio-marzo 1926).

L'A. ha inteso di svolgere una teoria del risparmio in economia *pura*, cioè partendo da poche e semplici premesse, procedendo con metodo deduttivo, e valendosi dell'analisi matematica. Egli ha utilizzato i materiali già preparati da autorevoli economisti; ma la novità del lavoro sta nell'avere inquadrato le analisi sulla deteriorazione dei beni nella teoria dell'equilibrio economico generale, dovuta al WALRAS e perfezionata dal PARETO. Inoltre si studia qui minutamente la curva di offerta del risparmio e s'indagano le deformazioni che la curva subisce al variare delle singole forze psicologico-economiche influenti sul risparmio. Le premesse generalissime sono:

1) che i piaceri e quindi l'utilità siano misurabili:

2) che l'utilità *totale* goduta da un individuo (Primus) mediante il *consumo* di un bene economico sia una funzione crescente della quantità del bene, almeno fino a un punto di sazietà che non si raggiunge quasi mai; che, tuttavia, l'utilità *finale* o *marginale* (ossia la derivata dell'utilità totale rispetto alla quantità del bene) sia decrescente:

3) che l'uomo miri a massimare l'utilità di cui può disporre.

S'incomincia col richiamare la definizione dell'*astinenza*: l'atto di sottrarre un certo ammontare di beni dal *consumo presente* per trasferirli al consumo *futuro*. Il bene di consumo a cui si rinunzia nel presente si chiama *risparmio*. E per estensione si chiama risparmio anche la *moneta*, in quanto destinata all'acquisto di quel bene di consumo. Di regola il risparmio è fruttifero, e allora la remunerazione del suo uso si chiama *interesse*. *Saggio* d'interesse i è l'ammontare d'interesse riferito all'unità di moneta e all'unità di tempo. In questo studio si prescinde dal rischio. Sia

$$(1) \quad u_a = f_a(a)$$

l'equazione della curva di utilità *finale* del *reddito presente*. Per *presente* s'intende una *durata* (non un istante) scelta come unità di tempo. Per *reddito* s'intende una somma a di danaro che si può tutta spendere in beni di consumo. Parimenti sia:

$$(2) \quad u_b = f_b(b)$$

l'equazione della curva di utilità *finale futura* del *reddito futuro*. Per *futuro* s'intende un intervallo di tempo successivo all'intervallo chiamato *presente*. Il reddito futuro b è la moneta che l'individuo potrà spendere in futuro per acquisto di beni di consumo. La (2) rappresenta l'utilità che l'individuo proverà nel *futuro*. Ma egli non ha la forza di rappresentarsi nel presente il piacere futuro come se fosse presente: egli lo vede invece sbiadito, diminuito, ossia lo *sconta*. Tanto è dire che σ è il *saggio subbiiettivo* di sconto per un individuo, quanto è dire che egli si dichiara indifferente tra un piacere 1 *futuro*, e un piacere $1 - \sigma$ *presente*. Ne consegue che il grado marginale *scontato* di utilità del reddito futuro è:

$$u_{\beta} = (1 - \sigma)f_b(b) = f_{\beta}(b).$$

Adesso chiamiamo $\bar{a}$ il reddito presente di Primus, $\bar{r}$ il suo risparmio. Il consumo presente di Primus si riduce e la sua utilità finale $f_a(\bar{a} - r)$ cresce al crescere di r . Conviene di esprimere siffatta utilità finale in funzione di r , scrivendo:

$$(3) \quad u_r = f_r(r).$$

Questa è la funzione di *costo subbiiettivo del risparmio*.

Si chiamino poi $\bar{b}$ il reddito futuro di Primus, $m = r(1 + i)$ il *montante* di questo risparmio. Ne consegue che il consumo futuro di Primus sale a $\bar{b} + m$ e la sua utilità finale scontata $f_{\beta}(b + m)$ decresce al crescere di m . Conviene di esprimerla in funzione di m , scrivendo:

$$(4) \quad u_m = f_m(m).$$

Questa è la funzione di *utilità presente del montante*.

Ora la (4) si deve *trasformare* in funzione di utilità del *risparmio* determinando così l'utilità *strumentale* del risparmio. Ogni unità di risparmio vale $1 + i$ unità di montante. Per trasformare la (4) da funzione di m in funzione di r basta dunque calcolare la

$$(5) \quad \varphi_r(r) = (1 + i)f_m[r(1 + i)],$$

il che in linguaggio geometrico significa avere moltiplicato le ordinate e diviso le ascisse della curva (4) per $1 + i$.

Orbene, il risparmiatore ha raggiunto il *maximum* di felicità, ossia di *utilità*, e quindi si trova in *equilibrio* quando

$$(6) \quad f_*(r) = \varphi_*(r),$$

ossia quando il *costo marginale* del risparmio uguaglia l'*utilità strumentale marginale* del risparmio medesimo. Geometricamente, quando la curva *crescente* del costo e la curva *decescente* dell'*utilità strumentale* s'intersecano.

La (6) è l'*equazione fondamentale del risparmio*.

Sia r la radice della (6). La r è il risparmio di equilibrio. E la *rendita positiva* del risparmiatore (ossia il guadagno imputabile all'operazione di *astinenza*), stimata in *utilità presente*, è

$$\int_0^r f_m(m) dm - \int_0^r f_*(r) dr.$$

Il primo termine è l'*utilità totale* del montante futuro stimata nel presente. Il secondo termine è il *costo totale* dell'*astinenza*, ossia il piacere totale che si sarebbe ricavato dai beni che invece si sono risparmiati.

Dalla (6) si ricava

$$(7) \quad r = F_*(i)$$

traducibile graficamente in una *curva di offerta del risparmio*. L'A. dimostra che, sempre quando l'*utilità iniziale* (presente) del montante superi il *costo iniziale* del risparmio, ossia quando

$$f_m(0) > f_*(0)$$

la curva di offerta del risparmio parte da un punto di ordinata zero e di *ascissa negativa*, è in un primo tratto *crescente*, raggiunge un massimo, *decresce*, ha un punto d'*inflessione* e rimane *assintotica* rispetto all'asse delle ascisse. In altre parole c'è un *saggio negativo* d'interesse a cui conviene iniziare il risparmio; al *saggio zero* pure si risparmia; crescendo il *saggio*, il risparmio cresce; esiste un *saggio* che rende massimo il risparmio (*saggio massimante*); se il *saggio* d'interesse cresce ancora, il risparmio *diminuisce*.

Il *saggio massimante* i_z , a giudicare dall'esperienza, ha un elevato *valor assoluto*: ma non è da escludere, teoricamente, che i_z sia nullo e persino *negativo*.

Dato un saggio di mercato sarebbe assai utile poter subito decidere se quello è per Primus un saggio massimante o se gli è inferiore o superiore, perchè a seconda dei casi un piccolo aumento del saggio d'interesse di mercato farà aumentare o diminuire il risparmio di Primus. Ora un metodo relativamente semplice consiste nel servirsi dei montanti. Determinato il saggio massimante i_z , e però il risparmio massimo r_z , si chiami m_z il montante massimante, ossia si ponga:

$$m_z = (1 + i_z)r_z.$$

Mentre il risparmio r , al crescere del saggio i , prima cresce e poi decresce, il montante $m = (1 + i)r$ cresce sempre. Quindi, a seconda che il saggio di mercato i sia inferiore uguale o superiore a i_z , il montante m sarà inferiore uguale o superiore a m_z . E *inversamente*, a seconda che m sia inferiore, uguale o superiore a m_z il saggio di mercato i sarà inferiore, uguale o superiore a i_z . Ora vi è un modo di conoscere m_z dalla semplice ispezione della curva (4) di utilità del montante ed è di cercarvi il punto che rende massimo il rettangolo delle coordinate (*punto di elasticità 1*). L'ascissa di siffatto punto è proprio m_z . Così, supposto, in un esempio numerico molto facile.

$$u_m = 3 - \frac{m}{4}$$

si vede subito che $m_z = 6$. Questa grandezza diventa una costante a cui paragonare i vari valori di m . Ci dicano per es. che al saggio del 10 % Primus ha risparmiato 2 unità di moneta. Qui abbiamo $(1 + i)r = 2.20$, ed essendo 2.20 minore di 6 si deduce immediatamente che i è *al disotto* del saggio massimante. Dunque se il saggio scende al disotto del 10 % Primus diminuisce il suo risparmio, e se sale (di non molto), Primus aumenta il suo risparmio.

Torniamo adesso al caso teorico di un saggio massimante nullo o negativo. Anche qui la nozione del montante massimante è utile. Chiamiamo m_0 il risparmio a interesse zero, ossia l'ascissa del punto d'intersezione tra le due curve $f_m(r)$ di utilità del risparmio e $f_r(r)$ di costo del risparmio. A seconda che sia

$$m_0 \begin{matrix} < \\ > \end{matrix} m_z$$

avremo

$$i_z \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} 0.$$

Ripetiamo però che i casi $i_s \geq 0$ sono poco probabili.

In generale le cause che tentano a far crescere i_s sono:

- 1) l'innalzarsi delle curve $u_b = f_b(b)$ di *utilità futura del reddito futuro*;
- 2) l'aumentare della *previdenza* dell'individuo, ossia il decrescere di σ ;
- 3) il diminuire del *reddito futuro* $\bar{b}$;
- 4) l'abbassarsi della curva $u_a = f_a(a)$ di *utilità presente del reddito presente*;
- 5) l'accrescersi del *reddito presente* $\bar{a}$.

Per meglio rendersi conto dell'operare di siffatte cause, l'A. suppone che le curve di utilità del risparmio e di costo del montante siano *lineari*. Ossia pone

$$\begin{aligned} f_r(r) &= \alpha_1 + \beta_1 r \\ f_m(m) &= \alpha_2 - \beta_2 m. \end{aligned}$$

La curva di offerta del risparmio diventa

$$r = F(i) = \frac{\alpha_1(1+i) - \alpha_2}{\beta_1 + \beta_2(1+i)^2}$$

e il massimo di r si raggiunge quando i prende il valore

$$(7) \quad i_s = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} - 1 + \sqrt{\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^2 + \frac{\beta_1}{\beta_2}}$$

e allora r prende il valore

$$r_s = \frac{\alpha_2}{2\beta_2(1+i_s + 1)}.$$

Ora la (7) ci mostra che i_s varia nello stesso senso di α_1 e β_2 , in senso inverso di α_2 e β_1 e l'A. illustra il significato di queste relazioni.

Poi l'A. passa a studiare come si deforma la curva del risparmio quando variano:

- 1) i *bisogni* e i *redditi*, o presenti o futuri.

Se tutta la *curva di utilità del montante si innalza* (se, cioè, o tutti i bisogni futuri s'intensificano, o il reddito futuro diminuisce), o se *tutta la curva di costo del risparmio si abbassa* (se, cioè, tutti i bisogni presenti si attenuano o il reddito presente si accresce) *tutta la curva di offerta del risparmio s'innalza*. E se s'invertono le premesse, anche la conseguenza s'inverte e tutta la curva di offerta del risparmio si abbassa. Se poi la curva di

utilità del montante s'innalza, ma *rotando* attorno al punto fisso di ascissa zero, o se la curva di costo del risparmio si abbassa, sempre *rotando* attorno a quel punto fisso, si genera un fascio di curve di offerta del risparmio, le quali hanno *comune il punto iniziale*, e sono ognuna più elevata della precedente.

2) i *prezzi futuri*. Vengano essi moltiplicati per un coefficiente $k > 1$. Man mano che k cresce, ossia la *moneta futura svlisce*, la curva di offerta del risparmio *si abbassa in un primo tratto, s'innalza in un secondo*.

3) il *saggio subbiettivo di sconto*. Al crescere di τ la curva di offerta del risparmio *si abbassa* progressivamente.

Nel caso del risparmiatore *insaziabile* (l'A. introduce questo concetto) il saggio massimante aumenta.

Supponendo che per un certo individuo Secundus l'utilità finale del reddito presente *superi* l'utilità finale scontata del reddito futuro, nasce per Secundus la convenienza di anticipare il consumo futuro facendosi mutuare un reddito equivalente. Ossia, al *saggio zero*, Secundus è disposto a compiere una astinenza *negativa*; a *domandare*, anzichè offrire, il risparmio. L'A. dimostra che, man man che il saggio d'interesse aumenta, la domanda di risparmio deve diminuire, finchè viene un saggio proibitivo, al quale la domanda di risparmio si annulla.

Rimanendo fedele all'ipotesi delle equazioni lineari, e ponendo:

$$\begin{aligned} f_r(r) &= \alpha_1 - \beta_1 r \\ f_m(m) &= \alpha_2 + \beta_2 m \end{aligned}$$

l'equazione della curva di *domanda* del risparmio diventa

$$r = \frac{\alpha_2 - \alpha_1(1+i)}{\beta_2 + \beta_1(1+i)}.$$

Infine l'A. procede alla sintesi e arriva alla curva di offerta del risparmio in una Nazione. Una volta note tutte le curve di offerte individuali, si addizionano lungo le ordinate e si ha una curva che indica l'*offerta complessiva* del risparmio in funzione del saggio d'interesse. Analogamente si possono addizionare lungo le ordinate tutte le curve individuali di domanda, e si ottiene la

curva di *domanda complessiva* del risparmio in funzione del saggio d'interesse.

Infine l'A. dispone una sotto l'altra le due curve complessive e calcola a parità di ascissa la differenza delle ordinate, prendendo come minuendo l'offerta e come sottraendo la domanda. Ottiene così la curva di *offerta netta del risparmio*. Fissato un qualsivoglia saggio d'interesse, la curva dice subito qual'è la somma complessiva di risparmio che è disponibile in una data collettività per gli scopi della produzione economica e per la produzione dei servizi pubblici.

HILDA P. HUDSON: *Cremona Transformations in plane and space*. (Cambridge, University Press, 1927: pag. XX-454).

È un'opera d'insieme, assai accurata e minuziosa, sulle trasformazioni cremoniane. Il vasto e multiforme materiale, desunto dall'ampia letteratura dell'argomento, viene qui rielaborato, ed esposto in modo ordinato e preciso. La forma è forse in qualche punto un po' sciatta e monotona; non sempre vien dato sufficiente risalto alle nozioni e alle proprietà di carattere più essenziale. Lo sviluppo è piuttosto analitico che sintetico: il simbolismo è relativamente abbastanza semplice e soprattutto uniforme. La veste tipografica magnifica contrasta un po' con la scarsità delle illustrazioni.

In complesso, si tratta d'un libro che certo riuscirà utilissimo a chiunque voglia occuparsi dell'argomento.

Darò un breve sommario del contenuto:

PARTI I. *Trasformazioni cremoniane piane*. — Il Cap. I contiene le prime generalità e i primi sviluppi della teoria generale delle trasformazioni cremoniane tra piani. Il Cap. II è dedicato specialmente al noto teorema fondamentale del CREMONA ⁽¹⁾: Se b_x, b_x' sono i numeri dei punti fondamentali di molteplicità i_x, i_x' delle due reti omoloidiche di una trasformazione, è $\Sigma b_x = \Sigma b_x'$, e i numeri b_x, b_x' possono differire soltanto nell'ordine. Nel Cap. III si trattano le trasformazioni quadratiche tra due piani (distinti, o coincidenti). Il Cap. IV si occupa della composizione e scomposizione delle trasformazioni piane, il Cap. V è dedicato alle trasformazioni cremoniane generali tra piani sovrapposti. Nel Cap. VI si viene a considerare qualche tipo speciale più notevole di trasformazioni cremoniane piane; particolarmente, le trasformazioni di JONQUIÈRES. Il Cap. VII tratta il problema della risoluzione delle singolarità

(1) Che qui viene indicato come *teorema di CLEBSCH* (pag. 23).

di una curva, e infine nel Cap. VIII viene esposta la dimostrazione del CASTELNUOVO pel teorema di CLIFFORD-NOETHER sulla riducibilità di una trasformazione cremoniana in un prodotto di trasformazioni quadratiche.

PARTE II. *Trasformazioni cremoniane spaziali.* — Dopo le generalità esposte nel Cap. IX, si passa a studiare, nel Cap. X, le trasformazioni T_{2-2} tra spazi (distinti o coincidenti) (che l'A. chiama *quadro-quadric transformations*). Si torna poi al caso generale, per determinare, nel Cap. XI, le formule esprimenti la *postulazione P.* e l'*equivalenza E*, relative ai singoli *elementi fondamentali* di un sistema omaloidico (∞^3) di superficie. Il Cap. XII (*Condizioni di contatto*) si occupa dei casi limiti, in cui alcuni elementi fondamentali divengono infinitamente vicini. Nel Cap. XIII si ha un'analisi del *sistema principale* (cioè, degli *elementi principali*, elementi di ciascuno spazio che corrispondono agli elementi fondamentali dell'altro). I Cap. XIV e XV sono dedicati a tipi speciali di trasformazioni cremoniane spaziali. Precisamente, nel Cap. XIV prima si considerano vari tipi di trasformazioni dei gradi più piccoli (T_{2-3} , T_{2-4} , T_{4-4} , ...), poi si tratta, più a lungo, la T_{3-3} (non singolare), poi le *trasformazioni monoidali*; infine, altri tipi speciali notevoli. E nel Cap. XV si considera una particolare trasformazione T_{3-4} (*cubo-quartic*). Nel Cap. XVI viene trattato il problema della *risoluzione delle singolarità delle superficie*. Dopo alcune considerazioni relative alla *composizione* delle trasformazioni spaziali, si accenna al metodo seguito, per risolvere le singolarità di una superficie, da DEL PEZZO-SEGREG-LEVI, poi si svolge più ampiamente l'altro metodo seguito da CHISINI.

Infine il Cap. XVII (*Storia e Letteratura*) dà un rapido accenno allo sviluppo storico della teoria delle trasformazioni cremoniane, e delle sue applicazioni.

L'opera si chiude con un'ampia e minuziosa bibliografia, e con un indice analitico degli argomenti trattati.

ENEA BORTOLOTTI

R. COURANT u. D. HILBERT: *Methoden der Mathematischen Physik*, I. Springer, Berlino, 1924, pag. XII+450.

Questo libro, redatto dal COURANT, porta il nome di HILBERT perchè molte parti di esso sono tolte dalle memorie di lui e perchè « die hier vertretenen wissenschaftlichen und pädagogischen Bestrebungen Kinder der mathematischen Geistesrichtung sind, welche für immer mit Hilberts Namen verbunden bleiben wird ». L'A. si rivolge a matematici e fisici osservando come da qualche anno si

sia esagerato nella specializzazione delle materie sicchè, mentre i matematici non si curano di collegare i loro studi con problemi posti dalla fisica, d'altra parte manca spesso ai fisici la comprensione di problemi e metodi matematici. Perciò egli svolge in questo libro i metodi matematici che si sono sviluppati in risposta alle classiche domande fisiche presentatesi nel secolo XIX. Il primo volume è diviso in sette capitoli; nel primo di questi si studia l'algebra delle trasformazioni lineari e delle forme quadratiche; nel secondo è studiato lo sviluppo in serie delle funzioni arbitrarie. Le nozioni su i sistemi ortogonali di funzioni, sulle serie di FOURIER, sui polinomi di LEGENDRE sono qui esposte con chiarezza insieme a cenni su altri tipi di sistemi ortogonali di funzioni.

Il terzo capitolo tratta delle equazioni integrali lineari; il quarto dei fondamenti del calcolo delle variazioni, con un cenno sui metodi diretti di soluzione.

Con i capitoli successivi cominciano le applicazioni; così nel quinto sono esposti gli studi sulle oscillazioni e su altri problemi dipendenti dalla determinazione di autovalori; il sesto si occupa delle applicazioni del Calcolo delle variazioni a questi problemi. L'ultimo delle funzioni definite da problemi particolari.

L'esposizione è chiara e dappertutto precisa, senza pedanterie. Ogni capitolo è corredato da complementi, esercizi e da una buona bibliografia. o. o.

F. KLEIN: *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*. Band I: *Arithmetik, Algebra, Analysis*. Ausgearbeitet von E. HELLINGER; für den Druck fertig gemacht und mit Zusätzen versehen von FR. SEYFARTH. Terza edizione, con 125 figure e con XII+322 pagine. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen, Band XIV). Julius Springer, Berlin, 1924.

La presente opera, che usciva nel 1924 già nella sua terza edizione, ha trovato un ben meritato successo in Italia, dove la matematica elementare, considerata dal punto di vista superiore, è materia obbligatoria nelle nostre Università (intendiamo di riferirci al corso di matematica complementare per le cosiddette Lauree in fisica e matematica) e negli esami di Stato. Le ragioni del successo, oltre che nella chiara concisione dell'A., vanno ricercate principalmente nella organicità dell'opera e nell'avere sufficientemente appagato il desiderio vivo della ricerca delle basi storiche. Il libro è diviso in tre parti (Aritmetica, Algebra, Analisi) e termina con un'appendice contenente due note di FR. SEYFARTH. o. i.