Annibale Comessatti

Osservazioni sulle curve iperellittiche reali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (1928), n.1, p. 10–14.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_1_10_0>

Osservazioni sulle curve iperellittiche reali.

Nota di ANNIBALE COMESSATTI (a Padova).

1. Nelle mie Memorie sulle varietà abeliane reali (1) ho considerato in modo particolare, anche perchè dà motivo ad un delicato problema (§ 5), il caso delle *curve di genere* 2. E. in una prima rapida ispezione (n. 8) ho iniziato il discorso affermando che:

« Anzitutto va rilevata una proprietà speciale dipendente dal « *carattere iperellittico* della curva C. Appena questa ammette una « simmetria S_1, ne ammette un' altra S_2, prodotto dalla prima per « la g_2^1, e le due simmetrie conducono ai *modelli reali* C_1, C_2

$$y^2 = f(x), \tag{1}$$

$$Y^2 = -f(X), \tag{1'}$$

« (*f* polinomio di 6° grado a coefficienti reali) che si trasformano « una nell' altra ponendo $X = x$, $Y = \pm iy$ ».

Ora quest' affermazione, *perfettamente rigorosa per il caso* (p = 2) *a cui si riferisce*, non lo è più, come il discorso potrebbe

(1) *Sulle varietà abeliane reali* [Annali di Mat. (4) 2 (1924-25) pp. 67-106, e 3 (1925-26) pp. 27-71].

far ritenere, nel caso iperellittico generale. E val la pena, almeno ci sembra, di esaminarlo un po' più intimamente.

Se la C iperellittica e di genere $p(>1)$ ammette una simmetria S, questa è permutabile colla g_2^1 (perchè la trasforma in sè) quindi ha per immagine, sulla retta x ove C è rappresentata doppiamente, una simmetria s definita a meno d' una proiettività. Ora sulla retta v' hanno, di fronte al gruppo proiettivo, *due classi* di simmetrie, costituite, l' una da simmetrie dotate di (infiniti) punti uniti ed equivalenti al *coniugio*, l' altra da simmetrie *prive di punti uniti* (1). Nel primo caso si può supporre che s sia addirittura il coniugio, ed allora è ovvio, ma del resto risulterà anche dal seguito, che l' affermazione predetta è valida: invece nel secondo, ove pur sia possibile, la riduzione al modello reale (1) non lo è certamente, giacchè per tal modello la s immagine di S (coniugio di C) è il coniugio dell' asse x.

Si vede subito che tal *caso nuovo* può presentarsi soltanto se la S è priva di punti uniti (quindi conduce a modelli privi di punti reali) e di coppie comuni colla g_2^1: giacchè in caso contrario avrebbe punti uniti la s. Ma la questione dell' esistenza di tipi che presentino questo caso, è senz' altro risolta, in senso affermativo, dall' esempio delle curve iperellittiche reali

(2) $$z^2 = f(xy), \quad x^2 + y^2 + 1 = 0.$$

(f polinomio) il cui coniugio ha per immagine quello del circolo γ rappresentato dalla seconda equazione, cioè appunto una s priva di punti uniti. Sulla retta t associata biunivocamente a γ dalla rappresentazione parametrica

(3 $$x = i\,\frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad y = \frac{2it}{1+t^2}.$$

quella s si riconduce al *tipo canonico* $t' = -\dfrac{1}{\bar{t}}$ ($\bar{t}$ coniugato di t) delle simmetrie appartenenti alla seconda classe precitata.

2. Si prova facilmente che *il caso nuovo può presentarsi solo per le curve di genere dispari* (quindi non per $p=2$). Allo scopo sulla C contenente una S priva di punti uniti si consideri la serie completa g_{2m}^{2m-p} (semplice e priva di punti fissi) somma della g_2^1

(1) Cfr. la mia Memoria, *Fondamenti per la geometria sopra le superficie razionali dal punto di vista reale* [Math. Ann. **73** (1912) pp. 1-72], n. 7.

e di un numero $m-1$ abbastanza elevato di coppie (prefissate) della S; anzi si supponga addirittura, com'è lecito a meno d'una trasformazione birazionale, che quella serie sia segata su C dagli iperpiani d'uno spazio S_{2m-p}. Su tal C la S, che muta in sè la serie delle sezioni iperpiane, resterà subordinata da un'*antiproiettività involutoria* τ dell'ambiente; e questa *se* p. *quindi* 2m — p *è pari*, ha sempre punti uniti, ed è riducibile proiettivamente al coniugio (loco cit. ([2]) n. 8), conducendo ad un *modello reale* Γ della C. Sulla Γ la $g_2{}^1$ resterà segata da un *fascio reale* d'iperpiani il cui asse s'appoggia alla curva nei $2(m-1)$ punti omologhi delle prefissate coppie di S; onde, proiettando da un S_{2m-p-3} reale immerso in quell'asse, si potrà dedurre da Γ una Γ' *piana reale* su cui la $g_2{}^1$ sia segata da un *fascio reale di rette*. Dopo ciò è notorio, come, operando una trasformazione birazionale *reale*, ci si riconduca alla (1).

A conferma mostriamo che *le curve* (2) *hanno sempre il genere dispari*. Ed invero, sul circolo γ, il gruppo di diramazione della $g_2{}^1$ è dato dalle intersezioni dispari colla $f=0$, alle quali, se il grado μ di f è dispari, si aggiungano le intersezioni colla retta impropria (punti ciclici) ([1]). Poichè quelle intersezioni sono due a due associate dal coniugio del piano, e nei due punti delle coppie coniugate le due curve hanno lo stesso comportamento, ne discende, in base ad osservazioni elementari, che il numero $2p+2$ dei punti di diramazione è multiplo di 4, e quindi che p è dispari come asserito.

Aggiungasi che *ogni curva iperellittica* C *contenente una* S *che presenti il caso nuovo, ammette un modello reale del tipo* (2). Difatti si può anzitutto supporre la **s** ridotta al coniugio del circolo γ, ed allora su questo il gruppo di diramazione G relativo a C, essendo trasformato in sè da **s** (perchè S muta in sè il gruppo dei punti doppi della $g_2{}^1$) sarà formato da $p+1$ coppie di punti coniugati, segate dalle rette *reali* $a_i(xy)=0$ $(i=1, 2, \ldots, p+1)$. Poichè $p+1$ *è pari*, così le (2) nelle quali si ponga $f \equiv a_1 \cdot a_2 \ldots a_{p+1}$ dànno una curva iperellittica Γ *reale* rappresentata doppiamente su γ col gruppo di diramazione G, quindi birazionalmente identica a C; e si può supporre scelto il segno di f in modo che delle due simmetrie di Γ corrispondenti alla **s** quella che resta associata alla S di C sia proprio il coniugio. Così si ha il modello voluto; ed analogamente si prova che in tutti gli altri casi, cioè quando **s** ha punti uniti, la C ammette un modello del tipo (1).

([1]) V. la mia Memoria, *Sulle curve doppie di genere qualunque*, ecc. [Mem. Acc. Torino (2) **60** (1909) pp. 313-350], n. 3.

3. Alla determinazione delle C che presentano il caso nuovo si può arrivare per un'altra via che ben si presta ad illustrare le divergenze legate alla *parità* del genere. Sulla retta z si fissi una s priva di punti uniti, ad es. la $z' = -\frac{1}{z}$, e sia G un gruppo formato con $p+1$ coppie della s, C la curva iperellitica legata al gruppo di diramazione G. Poichè questo è trasformato in sè da s, così, in forza d'una nota osservazione, immediatamente trasportabile al caso antibirazionale, alla s corrisponderanno due trasformazioni antibirazionali S_1, S_2, ciascuna delle quali è il prodotto dell'altra per la g_2^1. Vogliam mostrare che *le* S_1, S_2 *son simmetrie oppure trasformazioni cicliche di* 4^o *ordine, a seconda che* p *è dispari o pari.*

Difatti la C potrà identificarsi colla $w^2 = f(z)$, indicandosi con f un polinomio di grado $2p+2$ che si annulla nei punti di G; e poichè questi sono a due a due associati dalla s, così, fissato opportunamente in f il fattore costante, sussisterà l'identità $z^{2p+2} f\left(\frac{-1}{z}\right) = \bar{f}(z)$, nella quale si è denotato con $\bar{f}$ il polinomio coniugato ad f. Si vede allora che le S_1, S_2 son rappresentate dalle equazioni $z' = -\frac{1}{\bar{z}}$, $w' = \pm \frac{\bar{w}}{\bar{z}^{p+1}}$, che ne attestano subito la periodicità indicata.

Più espressivamente il diverso comportamento delle S_1, S_2 relative ai due casi s'illustra col ricorso alla *sfera complessa* Ω della variabile z, sulla quale la s considerata ha per immagine la *simmetria rispetto al centro* O porgendo così il noto modello elementare ($p=0$) delle *riemanniane diasimmetriche*. Sulla Ω il gruppo G vien rappresentato da $p+1$ coppie di punti diametralmente opposti, onde a ciascuno dei due emisferi in cui Ω resta divisa da un suo circolo massimo l che non passi per quei punti, ne appartengono $p+1$. E di conseguenza il *ciclo* l per ridursi con variazione continua ad un punto dovrà attraversare (una sola volta o un numero dispari di volte) $p+1$ punti di diramazione, onde, percorrendo quel ciclo da una posizione iniziale fino a ritornarvi, i due valori di w associati a z ritorneranno in se stessi oppure si scambieranno tra loro, a seconda che p sarà dispari o pari.

Ciò premesso, si scelgano su l debitamente *orientato* due punti $P_0(z_0)$, $P_1(z_1)$ diametralmente opposti, quindi associati in s, e siano $(w_0', w_0'')(w_1', w_1'')$ le coppie dei valori corrispondenti di w, indicandosi con w_1' quello che deriva da w_0' quando P_0, descrivendo l nel verso fissato, si porta in P_1. Una delle due trasformazioni di C corrispondenti alla s, dicasi S_1, potrà determinarsi associando a w_0'

uno dei valori relativi a P_1, p. es. w_1' e poi *trasportando* per continuità l'associazione, col far variare la coppia $P_0 P_1$ in Ω sempre mantenendo l'appartenenza ad s; con che il risultato sarà indipendente dal cammino, perchè, quando P_0 descrive un ciclo chiuso, P_1 descrive il ciclo diametralmente opposto che ha lo stesso comportamento rispetto ai punti di diramazione.

In particolare si trasporti, come prima, P_0 in P_1, con che P_1 si porterà in P_0 descrivendo l'altra metà di l. Il valore w_0' associato a P_0 in partenza si muterà per continuità in w_1'; mentre questo in quanto associato a P_1 (cioè fissato come omologo di w_0' in S_1) andrà in uno dei due valori (w_0', w_0'') corrispondenti a P_0, e precisamente nel primo o nel secondo, a seconda che percorrendo con z l'intero l da P_0 fino a ritornarvi, i due valori (w_0', w_0'') ritornano in se stessi, ovvero si scambiano tra di loro. E pertanto nel primo caso (p dispari) la S_1 associerà *involutoriamente* i punti $(z_0, w_0')(z_1, w_1')$ di C, mentre nel secondo (p pari) genererà successivamente i punti $(z_1, w_1')(z_0, w_0'')(z_1, w_1'')$ ed infine ricondurrà a (z_0, w_0'), dopo aver fatto descrivere un *ciclo di quattro elementi.*

In conclusione sopra una curva iperellittica C di genere pari una simmetria S *priva di punti uniti* ha sempre (infinite) coppie comuni colla g_2^1; la C ammette un modello reale (1) il cui *complementare* (1') è di tipo *ortosimmetrico* con *un ramo* (KLEIN). Invece per p dispari oltre al tipo precedente se ne ha un altro in cui la S non ha coppie comuni colla g_2'; esso non differisce dal complementare e può sempre ricondursi al modello (2).