Bollettino Unione Matematica Italiana

Nikolaĭ Nikolaevich Bogoliouboff, Nikolaĭ Mitrofanovich Kryloff

Sopra il metodo dei coefficienti costanti (metodo dei tronconi) per l'integrazione approssimata delle equazioni differenziali della Fisica Matematica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (1928), n.2, p. 72–76.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_2_72_0>

Sopra il metodo dei coefficienti costanti (metodo dei tronconi) per l'integrazione approssimata delle equazioni differenziali della Fisica Matematica.

Nota di N. BOGOLIOUBOFF e di N. KRYLOFF (Kiew, Ucraina).

Il metodo dei tronconi, che si potrebbe chiamare anche il metodo dei coefficienti costanti, consiste, come è ben noto, a dividere l'intervallo di integrazione della equazione differenziale data in n parti eguali, considerando in ciascuna di queste i coefficienti della equazione come costanti; nei punti di divisione dell'intervallo si scelgono in modo opportuno certe condizioni di continuità.

Questo metodo era usato fino ad oggi, a nostro sapere, solamente come procedimento di calcolo; in una memoria, che sarà pubblicata fra breve, ed i cui risultati furono già comunicati altrove, noi abbiamo tra altro stabilito [1] la *convergenza di questo e anche di ben altri procedimenti, elaborando la differente limitazione dell'errore commesso alla* n$^{\text{esima}}$ *approssimazione per il calcolo dei valori caratteristici del parametro, delle funzioni caratteristiche, e*

[1] Recente comunicazione di N. KRYLOFF all'Accademia delle Scienze di Ucraina a proposito del procedimento di W. RITZ ed altri metodi ad esso attinenti e delle ricerche fatte, in collaborazione con il suo allievo N. BOGOLIOUBOFF nel dominio delle differenti generalizzazioni del metodo delle differenze finite.

delle equazioni differenziali non omogenee nel caso generale, cioè a dire senza fare ipotesi restrittive a proposito del segno dei coefficienti che assicurino la positività della forma soggetta a variare sotto il segno di integrale.

Lo scopo di questa Nota è di osservare il vantaggio, che può presentare (sotto al punto di vista in ordine alla piccolezza della limitazione dell'errore), l'introduzione in questo dominio di ricerche del metodo delle quadrature dovuto ai geometri italiani, particolarmente del metodo osservato ed utilizzato per altri scopi dal ch.mo prof. SIGNORINI ed esposte dal ch.mo prof. M. PICONE nelle sue importanti *Lezioni di Analisi* [1].

A questo proposito consideriamo qui il problema della ricerca del k^{mo} valore caratteristico λ_k del sistema differenziale:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\left[p\dfrac{dy}{dx}\right]}{dx} + (\lambda r + q)y = 0; \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

Osserviamo che questo problema, come è noto, è equivalente a quello di minimizzare l'integrale:

$$(2) \qquad D[y] = \int_0^1 [py'^2 - qy^2]dx$$

sotto la condizione complementare:

$$(3) \qquad H[y] = \int_0^1 ry^2dx = 1; \quad H[y, \varphi_i] = \int_0^1 ry\varphi_i dx = 0; \qquad i = 1, 2, 3 \dots k-1$$

(dove φ_i, $i = 1, 2, \dots k-1$, sono le prime $k-1$ funzioni caratteristiche del sistema (1)).

Calcolando gli integrali in (2) e (3) per mezzo del metodo di SIGNORINI, otteniamo per il problema di minimo invece delle (2), (3), la seguente espressione:

$$(4) \qquad \begin{cases} D_n[y] = \displaystyle\int_0^1 [p_n y'^2 - q_n y^2]dx \\ H_n[y] = \displaystyle\int_0^1 r_n y^2 dx = 1; \quad H_n[y, \varphi_i^{(n)}] = \displaystyle\int_0^1 r_n y \varphi_i^{(n)} dx = 0, \quad (i = 1, 2 \dots n - \end{cases}$$

[1] Vol. I, pagg. 570-572.

dove

$$p_n(x) = \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)dy \quad \text{in} \quad (x_i \leq x \leq x_{i+1}), \quad h = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n}$$

$$q_n(x) = \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} q(x)dx \quad \text{in} \quad (x_i \leq x \leq x_{i+1}), \quad h = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n}$$

$$r_n(x) = \frac{1}{h}\int_{x_i}^{x_{i+1}} r(x)dx \quad \text{in} \quad (x_i \leq x \leq x_{i+1}), \quad h = x_{i+1} - x_i = \frac{1}{n}.$$

Come condizione di minimo, otteniamo le equazioni a coefficienti costanti, che danno le approssimazioni per la soluzione del problema di minimo sopradetto sotto la forma seguente:

(5)
$$\begin{cases} p_n(x_i)y_n'' + [\lambda r_n(x_i) + q(x_i)]y_n = 0 \\ \text{(in ciascuno degli intervalli } (x_i, x_{i+1})) \\ p_n(x_i - 0)y_n'(x_i - 0) = p_n(x_i + 0)y_n(x_i + 0 \\ \text{(nei punti di separazione degli intervalli sopraddetti).} \end{cases}$$

Valendoci del sistema ottenuto (5), abbiamo, dopo qualche calcolo, il sistema ricorrente seguente: « sistema dei tronconi » di cui l'applicazione ci dà un algoritmo per il calcolo approssimato dei valori singolari del parametro λ:

(6)
$$\begin{cases} y_{i+1} = \left[\dfrac{\beta_i}{\gamma_i \alpha_{i-1}}\alpha_i + \beta_i\right]y_i - \dfrac{\alpha_i}{\gamma_i \alpha_{i-1}} y_{i-1} \\ y_0 = y_n = 0, \end{cases}$$

dove

$$\gamma_i = \frac{p_n(x_i)}{p_n(x_{i-1})}, \quad \alpha_i = \frac{\operatorname{sen} A_i \Delta}{A_i}; \quad \beta_i = \cos A_i \Delta;$$

$$A_i^2 = \frac{\lambda^{(n)} r_n(x_i) + q_n(x_i)}{p_n(x_i)}; \quad \Delta = \frac{1}{n}; \quad y_i = y(x_i):$$

eguagliando a zero il determinante del sistema (6) lineare in y_i otteniamo una equazione trascendente per la determinazione dei valori approssimati sopraddetti di λ [1].

[1] Osserviamo che, in seguito, noi dovremo distinguere un errore proveniente dalla risoluzione approssimata della equazione trascendente, da un errore dovuto al meccanismo del metodo dei tronconi.

Facendo uso adesso del problema di minimo corrispondente al sistema (4) e della sua relazione col problema del minimo dell'integrale (2) sotto la condizione (3), noi otteniamo mediante un'analisi abbastanza complicata, che per conseguenza non può essere esposta qui, la limitazione seguente:

$$|\lambda_k^{(n)} - \lambda_k| < \frac{B + \lambda_k A}{n^2}, \tag{7}$$

dove

$$A < \frac{2|r'|CDn^2}{12n^2 \min[p] - 2|r'|CD}; \quad B < \frac{C_n[|p'|F_n + |q'|D_n]}{6 \min[p]};$$

$$C^2 = 2\sqrt{2}\sqrt{\lambda_k^2 + \left|\frac{q^2}{r}\right|}\sqrt{\lambda_k + \left|\frac{q}{r}\right|}; \quad D^2 = \sqrt{\frac{\lambda_k + \left|\frac{q}{r}\right|}{\min[p]\min[r]}};$$

$$C_n = C \cdot L; \quad D_n = DL; \quad L = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{|r'|2CD}{12n^2 \min[p]}}};$$

$$F_n = L\frac{E}{\min[p]} + \frac{|p'|C}{[\min[p]]^2}; \quad E = \frac{[|\lambda_k r| + |q|]^{3/2}\sqrt{k}}{\sqrt{\min[r]\min[p]}}.$$

Questo metodo dei tronconi, per mezzo dell'utilizzazione della formula dei quadrati sopraddetti, ci dà dunque la limitazione (7) dell'ordine di $\frac{1}{n^2}$.

La catena delle costanti A, B, C, D, L, F_n da calcolare è nondimeno molto complicata e abbastanza maggiorata; possiamo osservare, che mediante l'applicazione degli altri metodi, noi abbiamo ottenuto delle limitazioni molte più vantaggiose al punto di vista della pratica.

Per esempio: l'applicazione del metodo ordinario dei tronconi, dove è ancora valido il sistema (6), (ma dove, ben inteso, noi prendiamo altre medie per p_n, q_n, r_n), ci dà l'estimazione molto più semplice:

$$\begin{aligned} |\lambda_n^{(n)} - \lambda_k| < \frac{1}{n}\Big\{&\left[\frac{\max|q'|}{\min[r]} + \frac{\max|p'|\max|q|}{\min[r]\min[p]}\right] + \\ &+ \left[\frac{\max|r'|}{\min[r]} + \frac{\max|p'|}{\min[p]}\right][\max|qp| + k^2\pi^2(\max p)^2]\Big\} \end{aligned} \tag{8}$$

quantunque di ordine di piccolezza *meno* elevato; dobbiamo però osservare che nel caso della esistenza delle derivate seconde per $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ otteniamo invece di (8) la limitazione anche di ordine di $\frac{1}{n^2}$.

In altri nostri lavori ora in corso di stampa, è studiata la valutazione dell'errore commesso alla n^{ma} approssimazione nella applicazione dei differenti metodi delle differenze finite, dell'algoritmo variazionale (metodo di Ritz) ecc. nelle sue applicazioni ai problemi fondamentali della Fisica matematica; così noi abbiamo ottenuto la limitazione nella forma più adatta sotto il punto di vista della possibilità delle applicazioni pratiche.

Lo studio dettagliato di queste limitazioni ci ha condotto al convincimento che la difficoltà di questi problemi si trova non tanto nell'ottenere una limitazione dell'errore, che può farsi in differenti modi, quanto nella *limitazione sopraddetta la meno elevata possibile* (1), cioè sotto al punto di vista della possibilità delle applicazioni pratiche, nelle quali il problema si pone nella maniera seguente: per piccoli valori di n, $n = 2, 3$, che usano ordinariamente gli ingegneri nella pratica, *trovare* (usando le particolarità della questione) *per tale o tal' altra equazione differenziale data, il metodo del calcolo approssimato più appropriato* in modo che la maggiorazione dell'errore sia la minima possibile.

Kiew, Ucraina, 10 ottobre 1927.

(1) È vero che la limitazione (7) è ben lontana dal verificare le condizioni sopradette; tuttavia non è privo di un certo interesse, a quanto ci pare, l'ordine della parte destra di (7) dovuto ai metodi delle quadrature speciali quando p, q, r posseggono soltanto le derivate prime.