Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Frigyes Riesz

Su alcune disuguaglianze

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (1928), n.2, p. 77–79.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_2_77_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1928.

Su alcune disuguaglianze.

Nota di Frigyes Riesz

(Estratto da una lettera a Leonida Tonelli).

.... Nei suoi *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*, Ella ha riprodotto i ragionamenti coi quali io ho dimostrato, nel 1910, le disuguaglianze

$$(1)\qquad \left|\int_E fg\,dx\right| \leq \left[\int_E |f|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_E |g|^{\frac{p}{p-1}}\,dx\right]^{\frac{p-1}{p}}, \qquad (p > 1),$$

$$(2)\qquad \left[\int_E |f+g|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\int_E |f|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_E |g|^p\,dx\right]^{\frac{1}{p}}, \qquad (p \geq 1),$$

la prima delle quali si riattacca ai nomi di Cauchy, di Schwarz, e di Hölder. Per quanto riguarda la seconda, Ella mi ha onorato di una distinzione che io non merito, chiamandola col mio nome; in realtà essa è una generalizzazione quasi immediata di una disuguaglianza che figura già nelle ricerche di MINKOWSKI sulla geometria dei numeri.

Avendo in preparazione un libro sull'integrazione, io ho ripreso lo studio di queste disuguaglianze e sono giunto a dimostrarle con un ragionamento molto semplice, senza passare per le disuguaglianze corrispondenti relative alle somme di un numero finito di termini, e utilizzando soltanto le proprietà più elementari dell'integrale. Il ragionamento è pertanto applicabile immediatamente a dei casi più generali di quello dell'integrale del LEBESGUE, fino alle operazioni lineari e positive su degli insiemi astratti.

Siccome il mio libro è lungi dall'essere terminato, penso che Le interesserà di conoscere il ragionamento cui ho accennato.

Per fissare le idee, mi limiterò al caso degli integrali del LEBESGUE.

Sia $0 < \alpha < 1$. La funzione

$$\varphi(x) = x^{\alpha} - \alpha x + \alpha - 1,$$

avendo la sua derivata $\varphi'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - \alpha)$ positiva per $0 < x < 1$ e negativa per $x > 1$, è crescente nel primo caso e decrescente nel secondo; e siccome essa si annulla per $x = 1$, risulta $\varphi(x) \leq 0$ per $x \geq 0$, e cioè

$$x^{\alpha} \leq \alpha x + 1 - \alpha \qquad (x \geq 0).$$

Poniamo $x = \dfrac{A}{B}$ in questa disuguaglianza e poi moltiplichiamo tutto per B; avremo

$$A^{\alpha} B^{1-\alpha} \leq \alpha A + (1 - \alpha) B. \tag{3}$$

Ho supposto naturalmente $A \geq 0$, $B > 0$; ma sotto la forma (3), la disuguaglianza è valida anche per $B = 0$.

Siano ora $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni non negative sull'insieme misurabile E e tali che

$$\int_E f^p \, dx = \int_E g^{\frac{p}{p-1}} \, dx = 1,$$

p essendo un dato numero > 1. Poniamo, in (3),

$$A = f^p, \quad B = g^{\frac{p}{p-1}}, \quad \alpha = \frac{1}{p}:$$

avremo allora

$$fg \leq \frac{1}{p} f^p + \frac{p-1}{p} g^{\frac{p}{p-1}};$$

e, integrando:

$$\int_E fg\,dx \leq \frac{1}{p} + \frac{p-1}{p} = 1.$$

Per passare al caso generale, non c'è che sostituire f con $|f| : \left[\int_E |f|^p dx\right]^{\frac{1}{p}}$ e g con $|g| : \left[\int_E |g|^{\frac{p}{p-1}} dx\right]^{\frac{p-1}{p}}$; si ha così

$$\int_E fg\,dx \leq \left[\int_E |f|^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_E |g|^{\frac{p}{p-1}} dx\right]^{\frac{p-1}{p}},$$

e, a più forte ragione, la (1).

La disuguaglianza (2) può essere dedotta immediatamente dalla (1).

Partiamo infatti dalla uguaglianza

$$\int_E (f+g)^p dx = \int_E f(f+g)^{p-1} dx + \int_E g(f+g)^{p-1} dx,$$

ove supponiamo $f \geq 0$, $g \geq 0$, e applichiamo, a ciascun termine del secondo membro, la disuguaglianza (1), sostituendo in essa, a f, rispettivamente f e g, e a g, $(f+g)^{p-1}$. Abbiamo

$$\int_E (f+g)^p dx \leq \left[\int_E f^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_E (f+g)^p dx\right]^{\frac{p-1}{p}} + \left[\int_E g^p dx\right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_E (f+g)^p dx\right]^{\frac{p-1}{p}},$$

da cui, dividendo per $\left[\int_E (f+g)^p dx\right]^{\frac{p-1}{p}}$, otteniamo la disuguaglianza (2), per il caso qui considerato. Il caso generale di funzioni di segno variabile o assumenti valori immaginari, ne segue a più forte ragione.

Szeged, 5 febbraio 1928.