Bollettino Unione Matematica Italiana

Attilio Palatini

Sulle funzioni di variabile complessa di una superficie e sui moti laminari

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (1928), n.2, p. 82–87.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_2_82_0>

Sulle funzioni di variabile complessa di una superficie e sui moti laminari.

Nota di ATTILIO PALATINI (a Pavia).

Il prof. CISOTTI in una Nota della R. Acc. dei Lincei [1] ha reso precisa la nozione di variabile complessa di una superficie (già introdotta solo implicitamente dal BELTRAMI nelle sue classiche ricerche in proposito) e se ne è valso poi per stabilire l'equazione fondamentale dei moti laminari potenziali sopra una superficie qualunque. Scopo della presente Nota è quello di dare alle formule di BELTRAMI e CISOTTI una forma diversa, la quale mi sembra più espressiva e più atta allo studio di problemi del tipo di quelli sopra accennati.

1. È noto [2] che la metrica di una superficie qualunque σ, invece che da una forma differenziale quadratica positiva, può esser definita da un sistema di due forme differenziali lineari fra loro indipendenti. Ciò equivale a definire geometricamente la metrica mediante due congruenze [1] e [2] ortogonali di linee tracciate sulla superficie stessa.

Siano

$$
\left\{
\begin{aligned}
\psi_1 &= \lambda_{1/1}\, dx_1 + \lambda_{1/2}\, dx_2,\\
\psi_2 &= \lambda_{2/1}\, dx_1 + \lambda_{2/2}\, dx_2,
\end{aligned}
\right.
\tag{1}
$$

le due forme che definiscono la metrica della superficie σ. Le $\lambda_{1/r}$, $\lambda_{2/r}$ $(r = 1, 2)$ si chiamano i momenti delle congruenze [1] e [2] rispettivamente.

Si considerino ora le due equazioni differenziali

$$
\psi_1 + i\psi_2 = 0,
$$
$$
\psi_1 - i\psi_2 = 0,
$$

dove i denota la $\sqrt{-1}$.

[1] U. CISOTTI, *Equazioni fondamentali dei moti laminari potenziali sopra una superficie qualunque.* (Rend. Acc. Lincei, vol. I, serie 6ª, 1925, pp. 612-617).

[2] Cfr. G. RICCI, *Sulla determinazione di varietà dotate di proprietà intrinseche date a priori.* (Rend. Acc. Lincei, vol. XIX, serie 5ª, 1910, pp. 181-187) dove la questione è trattata per una varietà qualunque ad n dimensioni.

Sia μ un fattore integrante della prima equazione: sarà $\bar{\mu}$ (coniugato di μ) fattore integrante della seconda, cosicchè se z è quella tale funzione (individuata a meno di una costante additiva) per cui risulti

$$dz = \mu(\psi_1 + i\psi_2), \tag{2}$$

sarà, denotando con $\bar{z}$ la coniugata di z,

$$d\bar{z} = \bar{\mu}(\psi_1 - i\psi_2).$$

La funzione z si chiamerà variabile complessa della superficie σ definita dalle (1) [1]. Essa coincide manifestamente con la variabile $x + iy$ se σ è un piano e ci si riferisce a coordinate cartesiane ortogonali.

In luogo della (2) si possono scrivere le due equazioni equivalenti

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x_1} &= \mu(\lambda_{1|1} + i\lambda_{2|1}), \\ \frac{\partial z}{\partial x_2} &= \mu(\lambda_{1|2} + i\lambda_{2|2}). \end{aligned}\right. \tag{3}$$

Introduciamo ora in luogo della derivazione ordinaria, la derivazione intrinseca definita dalle formule

$$\frac{\partial}{\partial s_j} = \sum_{r}^{2}{}_{1} \lambda_j^{r} \frac{\partial}{\partial x_r}, \tag{4}$$

dove ds_j è l'elemento d'arco delle linee della congruenza $[j]$ e λ_j^{r} gli elementi reciproci delle $\lambda_{j|r}$ nel determinante delle stesse λ.

Alle (3) si può dare allora immediatamente la forma

$$\frac{\partial z}{\partial s_1} = \mu, \qquad \frac{\partial z}{\partial s_2} = i\mu. \tag{5}$$

2. Sia ora f una funzione qualunque di z. Mercè le (4) e (5) si trova subito

$$\frac{\partial f}{\partial s_1} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial s_1} = \mu\frac{df}{dz},$$

$$\frac{\partial f}{\partial s_2} = \frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial s_2} = i\mu\frac{df}{dz}.$$

[1] L'arbitrarietà di scelta del fattore integrante μ porta a ciò soltanto, che in luogo di z si può assumere, come variabile complessa di σ, una sua qualunque funzione.

e quindi

$$\frac{\partial f}{\partial s_2} = i \frac{\partial f}{\partial s_1}.$$

Ora, se $f = \varphi + \psi$, separando in quest'ultima equazione il reale dall'imaginario, si ottiene

$$(6) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial s_1} = \dfrac{\partial \psi}{\partial s_2}, \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial s_2} = - \dfrac{\partial \psi}{\partial s_1}. \end{cases}$$

Sono queste le condizioni (di monogeneità), le quali esprimono che, sulla superficie σ, le funzioni φ e ψ sono parte reale e coefficiente dell'imaginario di una funzione della variabile complessa z. Esse non sono altro che le condizioni già date dal BELTRAMI, ma sono scritte sotto una forma identica a quella sotto cui si presentano nel piano.

Ricordando le formule di commutazione per le derivate intrinseche [1], si elimina con facilità la ψ tra le (6) e si trova che la φ soddisfa all'equazione seguente

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_2^2} - \gamma_{212} \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} - \gamma_{121} \frac{\partial \varphi}{\partial s_2} = 0$$

(γ_{121} e γ_{212} sono le curvature geodetiche delle linee 1 e 2), la quale, con le notazioni presenti, non è altro che l'equazione generalizzata di LAPLACE

$$\Delta_2 \varphi = 0$$

ed esprime pertanto l'armonicità di φ.

Analogamente dicasi per ψ, la quale si chiamerà perciò l'armonica associata di φ.

3. La forma (6) delle condizioni di monogeneità è indipendente dalle congruenze prescelte per definire la σ. Siano infatti date due altre congruenze [1]' e [2]' di momenti $\mu_{1|r}$ e $\mu_{2|r}$ e siano

$$\beta_{ij} = \sum_1^2{}_r \lambda_{i|r} \mu_j{}^r$$

i coseni degli angoli che le linee della congruenza [i] formano

[1] T. LEVI-CIVITA, *Lezioni di Calcolo differenziale assoluto*. (A. Stock, Roma, 1925) pag. 289.

con quelle della congruenza $[j]'$. Se s_j' sono gli archi delle linee di quest'ultima congruenza, sarà

$$\frac{\partial}{\partial s_j'} = \sum_1^2 {}_r \mu_j^{r} \frac{\partial}{\partial x_r} = \sum_1^2 {}_i \beta_{ij} \frac{\partial}{\partial s_i}.$$

Tenuto conto delle (6) e ricordando che il determinante delle β è uguale ad uno (supposto che le linee delle congruenze siano orientate in modo opportuno), si trova subito

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_1'} = \frac{\partial \psi}{\partial s_2'},$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_2'} = -\frac{\partial \psi}{\partial s_1'}.$$

4. Sia ora v un vettore superficiale e siano v_i le sue componenti secondo le linee i; sarà

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial v_1}{\partial s_1} + \frac{\partial v_2}{\partial s_2} - \gamma_{212} v_1 - \gamma_{121} v_2,$$

$$\operatorname{rot} v = \frac{\partial v_1}{\partial s_2} - \frac{\partial v_2}{\partial s_1} - \gamma_{121} v_1 + \gamma_{212} v_2,$$

(si intende, naturalmente, div e rot superficiali).

Si supponga che v rappresenti la velocità delle particelle di un velo liquido mobile sulla superficie σ e che le v_i si presentino quali derivate intrinseche di una funzione φ armonica, sia cioè, denotando con ψ l'armonica associata di φ,

$$(7) \qquad v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial s_1} = \frac{\partial \psi}{\partial s_2}; \qquad v_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial s_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial s_1}.$$

Si trova immediatamente

$$\operatorname{div} v = 0 \quad \text{e} \quad \operatorname{rot} v = 0$$

e il moto risulta esser potenziale, incompressibile e irrotazionale (sulla σ).

Si consideri ora la congruenza delle linee di flusso. Se s_1' sono gli archi di dette linee ed s_2' quelle delle traiettorie ortogonali, sarà

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_1'} = v, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial s_2'} = 0,$$

quindi per l'osservazione dell'art. 4

$$\frac{\partial\psi}{\partial s_1'} = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial s_2'} = v.$$

Ne segue immediatamente che lungo le linee di flusso è $\psi = \text{cost}$, mentre lungo le traiettorie ortogonali è $\varphi = \text{cost}$ (linee equipotenziali).

Se l è una linea qualunque tracciata sulla σ, ed $\boldsymbol{n}$ un vettore unitario superficiale e normale ad l, dovrà ritenersi

$$\text{flusso} = \int_l v \times n dl = \int_l \frac{\partial\varphi}{\partial n} dl.$$

Imaginando orientate le linee in modo opportuno, per le condizioni di monogeneità e con ovvio significato dei simboli, si ha quindi

$$\text{flusso} = \int_l \frac{\partial\psi}{\partial l} dl = \psi_1 - \psi_0,$$

ossia, come nei moti piani, il flusso è uguale alla differenza dei valori di ψ agli estremi di l.

5. Per stabilire ora l'equazione fondamentale dei moti laminari potenziali, si riscriva l'equazione dell'art. 2

$$\frac{\partial f}{\partial s_1} = \mu \frac{df}{dz}.$$

Se è $f = \varphi + i\psi$, si ha

$$\mu \frac{df}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial s_1} + i \frac{\partial\psi}{\partial s_1} = \frac{\partial\varphi}{\partial s_1} - i \frac{\partial\varphi}{\partial s_2},$$

ossia per le (7)

$$\frac{df}{dz} = \frac{1}{\mu}(v_1 - iv_2). \tag{8}$$

Questa dovrà ritenersi l'equazione fondamentale ricercata. Essa ha lo stesso aspetto formale dell'analoga equazione dei moti piani, salvo la presenza del fattore $\frac{1}{\mu}$ (che per i moti piani e in coordinate cartesiane ortogonali si può assumere eguale ad 1).

La presenza del fattore $\frac{1}{\mu}$ ha analiticamente questo ufficio. Per una funzione φ qualunque si ha

$$\frac{\partial}{\partial s_k} \Delta_2 \varphi - \Delta_2 \frac{\partial \varphi}{\partial s_k} = G \frac{\partial \varphi}{\partial s_k}$$

(G curvatura di Gauss della superficie σ), quindi se φ è una funzione armonica, non lo sono in generale le $\frac{\partial \varphi}{\partial s_k} = v_k$. v_1 e $-v_2$ non possono quindi essere, sopra σ, parte reale e imaginaria di una funzione di variabile complessa z. Ora il fattore $\frac{1}{\mu}$, che comparisce nella (8), ha per effetto di rendere il secondo membro funzione di z, ciò che risulta dal significato del primo membro e come i calcoli permettono facilmente di verificare.

Pavia, febbraio 1928.