# Bollettino Unione Matematica Italiana



Francesco Sbrana


## Sull'espressione differenziale $X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$


*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **7** (1928), n.2, p. 95–98.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_2_95_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1928.

## Sull'espressione differenziale $Xdx + Ydy + Zdz$.

Nota di FRANCESCO SBRANA (a Genova).

**1.** Da una Nota del prof. GOFFREDO VITALI, pubblicata nell'annata 1926 di questo « Bollettino » (pp. 123-124) risulta che se $M = M(x, y)$, $N = N(x, y)$ sono due funzioni continue dei punti di un rettangolo $S$ del piano $(x, y)$, coi lati paralleli agli assi coordinati, la condizione necessaria e sufficiente perchè l'espressione differenziale

$$Mdx + Ndy$$

sia un differenziale esatto in $S$, è che si abbia

$$\int_{x_0}^{x} M(x, y)dx + \int_{y_0}^{y} N(x_0, y)dy = \int_{y_0}^{y} N(x, y)dy + \int_{x_0}^{x} M(x, y_0)dx.$$

per tutte le coppie di valori $(x_0, y_0)$ e $(x, y)$, che corrispondono a punti di $S$.

Di questo risultato ha dato un'elegante applicazione alla teoria delle funzioni di variabile complessa il prof. ANGELO TONOLO [1]. Non sembra invece sia stato rilevato che il risultato stesso si estende in modo agevole al caso delle funzioni di tre variabili. Si trova infatti che: se $X = X(x, y, z)$, $Y = Y(x, y, z)$, $Z = Z(x, y, z)$, *sono tre funzioni continue dei punti interni a un parallelepipedo* S, *con le facce parallele ai piani coordinati, la condizione necessaria e sufficiente perchè l'espressione differenziale*

$$Xdx + Ydy + Zdz \tag{1}$$

*sia un differenziale esatto in* S, *è che si abbia*

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x} X(x, y, z)dx + \int_{y_0}^{y} Y(x_0, y, z)dy + \int_{z_0}^{z} Z(x_0, y_0, z)dz = \\ &= \int_{y_0}^{y} Y(x, y, z)dy + \int_{z_0}^{z} Z(x, y_0, z)dz + \int_{x_0}^{x} X(x, y_0, z_0)dx = \\ &= \int_{z_0}^{z} Z(x, y, z)dz + \int_{x_0}^{x} X(x, y, z_0)dy + \int_{y_0}^{y} Y(x_0, y, z_0)dy, \end{aligned} \tag{2}$$

[1] Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, anno Accademico 1926-1927, tomo LXXXVI, pp. 1-15.

*per tutte le terne di valori* $(x_0, y_0, z_0)$ *e* $(x, y, z)$, *che corrispondono a punti di* S.

Di qui segue poi, facilmente, che *se* X, Y, Z *sono tre funzioni continue dei punti di* S, *e se è nullo l'integrale dell'espressione* (1), *esteso ad una qualunque spezzata chiusa, coi lati paralleli agli assi coordinati* (supposta percorsa in un determinato verso), *l'espressione stessa è un differenziale esatto* (in S).

Quest'ultima osservazione ci sembra particolarmente notevole, per l'interpretazione che se ne può dare nella Meccanica. Se, infatti, $S$ è un campo di forze $\boldsymbol{F}$ *(posizionali)*, di componenti $X, Y, Z$ (continue in $S$), basterà che il lavoro di $\boldsymbol{F}$ sia nullo in corrispondenza di ogni cammino del tipo ora specificato, perchè la $\boldsymbol{F}$ sia *conservativa* in $S$. Con questo, crediamo diminuita la difficoltà che si presenta di solito, nell'insegnamento della Meccanica razionale, a volere stabilire rigorosamente (senza far ricorso alla formula di STOCKES, non sempre dimostrata nei corsi di Analisi infinitesimale), che se il lavoro di una forza posizionale $\boldsymbol{F}$ è nullo in corrispondenza di ogni cammino chiuso in $S$, il lavoro elementare [rappresentato dalla (1)], è un differenziale esatto.

Un altro vantaggio palese è rappresentato dal fatto di non richiedere l'esistenza delle derivate di $X, Y, Z$.

**2.** Per dimostrare quanto abbiamo sopra asserito, supposto che valga in $S$ la (2), poniamo

$$f = f(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} X(x, y, z)dx + \int_{y_0}^{y} Y(x_0, y, z)dy + \int_{z_0}^{z} Z(x_0, y_0, z)dz.$$

Di qui segue

$$\frac{\partial f}{\partial x} = X(x, y, z), \tag{3}$$

e dalle altre espressioni di $f$, fornite dalla (2)

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Y(x, y, z), \quad \frac{\partial f}{\partial z} = Z(x, y, z); \tag{4}$$

per conseguenza la (1) è il differenziale di $f$.

Viceversa, supposto, in $S$,

$$X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz = df(x, y, z),$$

sussistono, naturalmente, le (3), (4), dalle quali discende

$$
(5)\qquad \begin{gathered}
f(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} X(x, y, z)dx + \varphi_1(y, z) = \int_{y_0}^{y} Y(x, y, z)dy + \varphi_2(z, x) = \\
= \int_{z_0}^{z} Z(x, y, z)dz + \varphi_3(x, y).
\end{gathered}
$$

Facendo successivamente $x = x_0$, $y = y_0$ e $z = z_0$, si trova

$$
(6)\qquad \left\{ \begin{aligned}
\varphi_1(y, z) &= \int_{y_0}^{y} Y(x_0, y, z)dy + \varphi_2(z, x_0) = \int_{z_0}^{z} Z(x_0, y\ z)dz + \varphi_3(x_0, y). \\
\varphi_2(z, x) &= \int_{z_0}^{z} Z(x, y_0, z)dz + \varphi_3(x, y_0) = \int_{x_0}^{x} X(x, y_0, z)dx + \varphi_1(y_0, z). \\
\varphi_3(x, y) &= \int_{x_0}^{x} X(x, y, z_0)dx + \varphi_1(y, z_0) = \int_{y_0}^{y} Y(x, y, z_0)dy + \varphi_2(z_0, x):
\end{aligned} \right.
$$

mentre facendo nella prima di queste $y = y_0$, nella seconda $z = z_0$, e nella terza $x = x_0$, risulta

$$
(7)\qquad \left\{ \begin{aligned}
\varphi_2(z, x_0) &= \int_{z_0}^{z} Z(x_0, y_0, z)dz + \varphi_3(x_0, y_0), \\
\varphi_3(x, y_0) &= \int_{x_0}^{x} X(x, y_0, z_0)dx + \varphi_1(y_0, z_0), \\
\varphi_1(y, z_0) &= \int_{y_0}^{y} Y(x_0, y, z_0)dy + \varphi_2(z_0, x_0).
\end{aligned} \right.
$$

Dalle (6), (7), segue intanto

$$
(8)\qquad \left\{ \begin{aligned}
\varphi_1(y, z) &= \int_{y_0}^{y} Y(x_0, y, z)dy + \int_{z_0}^{z} Z(x_0, y_0, z)dz + \varphi_3(x_0, y_0), \\
\varphi_2(z, x) &= \int_{z_0}^{z} Z(x, y_0, z)dz + \int_{x_0}^{x} X(x, y_0, z_0)dx + \varphi_1(y_0, z_0), \\
\varphi_3(x, y] &= \int_{x_0}^{x} X(x, y, z_0)dx + \int_{y_0}^{y} Y(x_0, y, z_0)dy + \varphi_2(z_0, x_0);
\end{aligned} \right.
$$

d' altra, parte, dalle (7) si ha

$$\varphi_1(y_0, z_0) = \varphi_2(z_0, x_0) = \varphi_3(x_0, y_0),$$

per cui, sostituendo nella (5) le espressioni (8) delle funzioni $\varphi_1(y, z)$, $\varphi_2(z, x)$, $\varphi_3(x, y)$, si ottiene senz' altro la (2).

*Genova, 7 marzo 1928.*