Bollettino Unione Matematica Italiana

A. M. Bedarida

Sulle forme di Hermite

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (1928), n.3, p. 133–135.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_3_133_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1928.

Sulle forme di Hermite.

Nota di A. M. BEDARIDA (a Genova).

Nelle mie Memorie sopra le forme di HERMITE [1] si è veduto, per le forme definite (a determinante Δ negativo), che il numero delle classi delle forme primitive di prima specie $h(\Delta\mu\mu_0)$ e delle forme primitive di seconda specie $h'(\Delta\mu\mu_0)$ (μ intero indecomponibile nel corpo quadratico immaginario $k(\sqrt{-d})$ a cui appartengono le forme) ha un'espressione ben determinata, trinomia o binomia (solo eccezionalmente monomia) [2].

È notevole far vedere come questo fatto sia — generalmente — legato ai *numeri primi critici* del corpo; e, quindi, si può dire che,

(1) Cfr.: *Ricerche sopra il numero delle classi di forme aritmetiche di Hermite*, Memoria I: « Annali di Matematica », T. III, (1925-1926); Memoria II: « Annali di Matematica » (in corso di stampa).

(2) Per le forme definite primitive di prima specie può aversi l'espressione trinomia solo nei corpi $k(\sqrt{-d})$ ove sia $d \equiv -1 \pmod{4}$.

in certo modo, la natura algebrica del numero delle classi delle forme definite è più legata al discriminante del corpo a cui appartengono le forme, che al loro determinante.

Questo risulta da quanto segue [1].

Consideriamo le tre forme indefinite di GAUSS:

$$(1) \qquad \varphi_1 = dx^2 - y^2, \quad \varphi_2 = 4dx^2 - 3y^2, \quad \varphi_3 = dx^2 - 3y^2.$$

Se il determinante Δ è rappresentabile (sotto alcune condizioni, che qui è inutile ricordare) dalla forma φ_1; il suo quadruplo delle forme φ_2 e φ_3, si ha, come risulta dalle nostre ricerche, l'espressione trinomia, tanto per le forme primitive di prima specie, quanto per le forme primitive di seconda specie. Per le prime si deve considerare la coppia φ_1, e φ_3; per le seconde, la coppia φ_1, φ_2. Se una di queste rappresentazioni viene a mancare, l'espressione diventa binomia.

Questi fatti avvengono generalmente, cioè escludendo dei valori per il numero fondamentale d, tra i quali vi sono $d = 1$ e $d = 3$.

Ora, se p è un numero primo critico dispari, che non entra in Δ e se avvengono le dette rappresentazioni, risulterà dalla (1):

$$\left(\frac{\Delta}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)$$

e

$$\left(\frac{\Delta}{p}\right) = \left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{\Delta}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right);$$

da cui:

$$\left(\frac{3}{p}\right) = +1.$$

Allora, per la legge di reciprocità, se $p \equiv 1 \pmod{4}$ sarà:

$$\left(\frac{3}{p}\right) = \left(\frac{p}{3}\right),$$

e quindi $p \equiv 1 \pmod{3}$; se $p \equiv 3 \pmod{4}$ sarà:

$$\left(\frac{3}{p}\right) = -\left(\frac{p}{3}\right),$$

e quindi $p \equiv 2 \pmod{3}$. Di qui si trae il risultato, che stabilisce quanto si è più sopra asserito:

Per le forme definite di Hermite, l'espressione trinomia per i numeri delle classi (forme primitive di prima e di seconda specie) si

[1] Le notazioni qui usate sono quelle delle Memorie.

potrà avere soltanto quando tutti i numeri primi critici dispari, che non entrano nel determinante delle forme, siano

$$\equiv \begin{cases} 1 \pmod{4} \\ 1 \pmod{3} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \equiv \begin{cases} 3 \pmod{4} \\ 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

E quindi:

L'espressione per i numeri delle classi (forme primitive di prima e di seconda specie) sarà binomia, se almeno uno dei detti numeri primi critici è tale che sia

$$\equiv \begin{cases} 1 \pmod{4} \\ 2 \pmod{3} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \equiv \begin{cases} 3 \pmod{4} \\ 1 \pmod{3}. \end{cases}$$

Genova, maggio 1928.