Bollettino Unione Matematica Italiana

Renato Caccioppoli

Un'estensione del concetto di assoluta continuità

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (1928), n.3, p. 135–139.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_3_135_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1928.

Un' estensione del concetto di assoluta continuità.

Nota di RENATO CACCIOPPOLI (a Napoli).

1. Di una funzione $f(x)$ a variazione limitata nell'intervallo (a, b) si può definire la *variazione* $V_P[f]$ su un qualunque insieme perfetto P contenuto in (a, b). Due procedimenti per il calcolo di $V_p[f]$ sono i seguenti:

1) Siano $(p_1, q_1), (p_2, q_2), \ldots$ gli intervalli contigui a P in (a, b): la serie $\sum\limits_n [f(q_n) - f(p_n)]$ è assolutamente convergente e si ha, dettane S la somma, $V_P[f] = f(b) - f(a) - S$.

2) Decomposto comunque (a, b) in intervalli parziali (in numero finito) si sopprime quelli esterni a P: siano $(\alpha_1, \beta_1), \ldots (\alpha_m, \beta_m)$ i rimanenti.

La somma $\sum\limits_n [f(\beta_n) - f(\alpha_n)]$ ha per limite $V_P[f]$, al tendere a zero della massima fra le lunghezze degli intervalli di decomposizione.

Indichiamo con P_x la porzione di P contenuta nell'intervallo (a, x) e poniamo $\varphi_P(x) = V_{P_x}[f]$. La funzione $\varphi_P(x)$ è a variazione limitata; se risulta di più assolutamente continua, si può dire che $f(x)$ è *assolutamente continua su* P.

Ora, questa definizione si può estendere a funzioni che non abbiano variazione limitata in (a, b).

Per una simile funzione può difatti risultare ancora convergente il procedimento 1), essere cioè assolutamente convergente la serie $\sum\limits_n [f(q_n) - f(p_n)]$.

La *variazione* di $f(x)$ è allora *definita*, secondo DENJOY [1], su P come sui segmenti P_x di P; però la funzione $\varphi_P(x)$ non è più necessariamente a variazione limitata. Diremo $f(x)$ *assolutamente continua* (D) su P quando $\varphi_P(x)$ sarà assolutamente continua.

La variazione di $f(x)$ su P può anche definirsi mediante il procedimento 2), supposto convergente; questa seconda definizione non è però equivalente, nel caso generale, alla prima. Invero, la convergenza del secondo procedimento implica quella del primo verso lo stesso risultato, ma l'inverso non ha luogo. Se la proprietà 2) è ammessa dall'insieme P (e quindi da ogni segmento P_x di P), e se $\varphi_P(x)$ è a variazione limitata, $f(x)$ è detta da LUSIN [2] *a variazione limitata* su P; risultando di più $\varphi_P(x)$ assolutamente continua, diremo $f(x)$ *assolutamente continua* (L) su P.

Introduciamo ora la nozione di *continuità quasi assoluta:*

Se per ogni $\varepsilon > 0$ *è possibile costruire in* (a, b) *un insieme perfetto* P *di misura maggiore di* $b - a - \varepsilon$ *su cui* $f(x)$ *sia assolutamente continua, e tale inoltre che la diseguaglianza* $|f(x) - f(a) - \varphi_P(x)| < \varepsilon$ *sia soddisfatta in ogni punto di* (a, b), *si dirà* $f(x)$ quasi-assolutamente continua; *e più precisamente* quasi-assolutamente continua (D) *o* (L) *secondochè è stata adottata per la variazione di* $f(x)$ *su* P *la definizione* 1) *o la definizione* 2) [3].

Si dimostra immediatamente che:

Ogni funzione a variazione limitata quasi-assolutamente continua è anche assolutamente continua.

L'interesse di una definizione come la presente, che estende quella ordinaria di assoluta continuità, sta nei rapporti che essa può rivelare con una generalizzazione dell'integrale di LEBESGUE. L'ufficio cui nella teoria dell'integrazione lebesguiana adempie la nozione di continuità assoluta spetta, nella teoria della *totalizzazione* di DENJOY, a quella di *risolubilità* [4]; la definizione di *funzione risolubile* è però greve e macchinosa, come tutta la trattazione di cui fa parte, e nella quale non credo possa dirsi che abbia trovato assetto definitivo una dottrina generale dell'integrazione indefinita.

Ho avuto altrove [5] occasione di suggerire, esponendo un teo-

(1) *Mémoire sur la totalisation etc.* (« Annales de l'École Normale », (III), 33, pp. 127-222), p. 156.

(2) *Sur les propriétés de l'intégrale de M. Denjoy* (« Comptes Rendus », 155, pp. 1475-77).

(3) Imponendo soltanto che P soddisfi la prima condizione, si ottiene una definizione di funzione a *variazione quasi limitata.*

(4) Loc. cit., p. 173.

(5) « Comptes Rendus », 186, pp. 832-34

rèma generale per il passaggio al limite sotto il segno di integrale indefinito, una nuova definizione di integrale; questa esige peraltro ancora una *mise au point*, di cui conto occuparmi fra breve. Intanto mi limiterò qui ad alcuni cenni sulle proprietà delle funzioni quasi-assolutamente continue, e sul legame fra la mia definizione di integrale indefinito e la nozione di continuità quasi assoluta.

2. *Ogni funzione quasi-assolutamente continua* (D) *è quasi ovunque* asintoticamente derivabile (1).

Infatti, supposta $f(x)$ quasi-assolutamente continua (D), potremo determinare in (a, b) un insieme perfetto P, avente misura arbitrariamente prossima a $b-a$, su cui $f(x)$ sia assolutamente continua (D). Definiamo su P una funzione $\psi_P(x)$, dandole per valore la somma delle variazioni di $f(x)$ sugli intervalli contigui a P interni a (a, x).

Si avrà in ogni punto di P

$$(a)\qquad f(x) = f(a) + \varphi_P(x) + \psi_P(x),$$

e derivando su P

$$(b)\qquad \frac{df}{dx} = \frac{d\varphi_P}{dx} + \frac{d\psi_P}{dx} = \frac{d\varphi_P}{dx},$$

in quasi ogni punto di P; poichè le derivate $\frac{d\varphi_P}{dx}$, $\frac{d\psi_P}{dx}$ esistono quasi ovunque su P, e la seconda vi è quasi sempre nulla.

La funzione $f(x)$ ammette dunque in quasi ogni punto di P la derivata *relativa a P*; questa coincide con la derivata asintotica in ogni punto in cui P ha densità 1, cioè ancora in quasi ogni punto di P. Ma la misura di P è arbitrariamente prossima a $b-a$: il teorema è così dimostrato.

Analogamente si dimostra che:

Ogni funzione quasi-assolutamente continua (L) *è quasi ovunque derivabile nel senso ordinario.*

Si completa in questo caso la definizione di $\psi_P(x)$ esternamente a P, ponendo, se x è interno all'intervallo (p_n, q_n),

$$\psi_P(x) = \psi_P(p_n) + f(x) - f(p_n).$$

La relazione (a) vale allora in tutto (a, b), e nella (b) le derivate possono intendersi calcolate nel modo ordinario (1).

(1) v. DENJOY, loc. cit., p. 170.

(2) Che la derivata di ψ_P sia quasi ovunque nulla su P segue dal fatto che è convergente la serie delle *oscillazioni* di $f(x)$ negli intervalli contigui a P; il che è necessario affinchè $f(x)$ sia su P a variazione limitata secondo LUSIN.

3. Fin qui non ci siamo però ancora serviti della proprietà fondamentale che, secondo la definizione precedente, caratterizza le funzioni quasi-assolutamente continue: quella cioè che $\varphi_P(x)$ approssima la variazione di $f(x)$ nell'intervallo (a, x). Mostreremo ora come da essa segua l'*integrabilità*, secondo la definizione di cui s'è fatto cenno più sopra, della derivata di una funzione quasi-assolutamente continua.

Sia $f(x)$ quasi-assolutamente continua (D) in (a, b). Prendiamo una successione tendente a zero di quantità positive $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$, ed associamo ad ogni ε_n un insieme perfetto P_n soddisfacente le condizioni di cui nella definizione fondamentale: possiamo supporre $P_n > P_{n-1}$. Si avrà

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_{P_n}(x) = f(x) - f(a)$$

uniformemente, e

$$\lim_{n \to \infty} \frac{d}{dx} \varphi_{P_n}(x) = \frac{df}{dx}$$

quasi ovunque in (a, b), $\dfrac{df}{dx}$ dinotando la derivata asintotica.

Ora le funzioni $\dfrac{d}{dx} \varphi_{P_n}(x)$ hanno questa proprietà: che dato comunque $\sigma > O$, si può determinare un insieme perfetto P tale che da un certo valore dell'indice n in poi sia

$$\left| \int_a^x \frac{d}{dx} \varphi_{P_n}(x) dx - \int_{P_x} \frac{d}{dx} \varphi_{P_n}(x) dx \right| < \sigma.$$

risultando di più dette funzioni *uniformemente sommabili* (1) su P: basterà all'uopo prendere $P \equiv P_m$, essendo $2\varepsilon_m < \sigma$.

Le funzioni $\dfrac{d}{dx} \varphi_{P_n}(x)$ essendo pertanto *quasi-uniformemente sommabili*, i loro integrali convergono uniformemente all'*integrale* (2) della funzione limite $\dfrac{df}{dx}$. Concludendo:

Ogni funzione quasi-assolutamente continua (D) *è l'integrale (nel nuovo senso convenuto) della sua derivata asintotica.*

(1) Cioè dotate di integrali uniformemente assolutamente continui. V. la mia memoria *Sull'integrazione delle funzioni discontinue* (« Rend. del Circolo Matematico di Palermo », 52), § 6.

(2) V. la mia nota citata.

In particolare:

Ogni funzione quasi-assolutamente continua (L) *è l'integrale della sua derivata ordinaria.*

Napoli, 19 Aprile 1928.