Bollettino Unione Matematica Italiana

Antonio Colucci

Qualche osservazione sulle funzioni convesse

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (1928), n.3, p. 139–142.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_3_139_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1928.

Qualche osservazione sulle funzioni convesse.

Nota di ANTONIO COLUCCI (a Napoli).

1. Secondo una definizione proposta da J. L. W. V. JENSEN [1], una funzione reale ed uniforme $f(P)$ del punto $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, definita in dominio T semplicemente connesso e convesso dello spazio euclideo ad n dimensioni, dicesi *convessa* in tale dominio se la somma dei valori che essa prende in due qualsivogliano punti di T non è mai inferiore del doppio del valore della funzione nel punto di mezzo del segmento determinato dai due punti.

In simboli, detti P_1, P_2 i due punti e P il punto medio del segmento P_1P_2, tale definizione si esprime ponendo:

$$f(P_1) + f(P_2) \geq 2f(P).$$

Il prof. P. TORTORICI, negli ultimi due numeri del suo recente lavoro: « *Sulle funzioni convesse* » [2], si occupa della dimostrazione del noto teorema di JENSEN: « *una funzione* f(x) *convessa e limitata superiormente in un intervallo è continua in ogni punto interno all'intervallo* », e della estensione di questa proprietà al caso delle funzioni convesse di più variabili. Egli, a tale proposito, dà il seguente enunciato:

« *Una funzione* f(P) *convessa e limitata superiormente in un dominio* Ω *ad* n *dimensioni semplicemente connesso e convesso è ivi continua rispetto all'insieme delle sue variabili* ».

Con le righe che seguono mi permetto di presentare ai lettori di questo « Bollettino » alcune mie considerazioni intorno alle funzioni convesse. Propriamente, mostrerò che i teoremi di JENSEN e TORTORICI restano ancora veri facendo sulla $f(P)$ ipotesi assai più larghe di quelle fatte da questi Autori.

2. Supponiamo che la funzione convessa $f(P)$ sia superiormente limitata sopra un segmento A_0B_0 contenuto nel dominio T. Esisterà

[1] « Acta Mathematica », t. 30, (1906), pp. 175-193.

[2] « Annali di Matematica », s. 4ª, t. IV, (1927), pp. 147-150.

perciò una costante K tale da aversi, in ogni punto P_0 di detto segmento:

$$f(P_0) \leq K. \tag{1}$$

Preso un punto R interno a T, ma non appartenente al segmento A_0B_0, congiungiamolo col punto medio C_0 di A_0B_0; indi sul prolungamento di C_0R costruiamo un segmento RS *contenuto* in T e tale da aversi

$$mRS = C_0R,$$

con m intero.

Ciò premesso, dividiamo il segmento C_0R in m parti uguali mediante i punti $C_1, C_2, \dots, C_{m-1}$, e poniamo, per uniformità di esposizione, $C_m = R$, $C_{m+1} = S$. Infine, partendo dai punti A_0 e B_0, costruiamo le due poligonali $A_0A_1 \dots A_mC_{m+1}$, $B_0B_1 \dots B_mC_{m+1}$, aventi per vertici intermedî i punti centrali dei segmenti $C_2A_0, \dots, C_{m+1}A_{m-1}$, e quelli dei segmenti $C_2B_0, \dots, C_{m+1}B_{m-1}$, rispettivamente. Otteniamo così la successione di segmenti paralleli (o collineari): A_0B_0, $A_1B_1, \dots$, A_mB_m, tutti contenuti in T, aventi per centri i punti $C_0, C_1, \dots, C_m$, e tali che ognuno ha lunghezza metà del precedente.

Ora è chiaro che ad ogni punto P_m del segmento A_mB_m se ne associano altri m: $P_{m-1}, P_{m-2}, \dots, P_1, P_0$, situati sui segmenti $A_{m-1}B_{m-1}$, $A_{m-2}B_{m-2}, \dots, A_1B_1$, A_0B_0 rispettivamente, tali che per due punti consecutivi qualsivoglia P_{i-1}, P_i [1] ha luogo la relazione:

$$2f(P_i) \leq f(P_{i-1}) + f(C_{i+1}).$$

Facendo in questa successivamente $i = 1, 2, \dots, m$, e combinando le relazioni che così si ottengono con la (1) ricaviamo

$$f(P_m) \leq \frac{K}{2^m} + \sum_{i=2}^{m+1} \frac{f(C_i)}{2^{m-i+2}}.$$

Questa diseguaglianza ci mostra che $f(P)$ è limitata superiormente nell'intervallo A_mB_m di centro R. Ma R è un arbitrario punto *interno* a T, dunque:

Se la funzione f(P) *è limitata superiormente sopra un segmento* $\mathrm{A_0B_0}$ *contenuto in* **T**, *essa è tale su ogni segmento collineare o parallelo ad* $\mathrm{A_0B_0}$, *i cui estremi siano interni a* **T**.

Mettendo in relazione il teorema di Jensen con la proposizione testè enunciata, si ha il seguente notevole teorema:

Una funzione f(P), *convessa in un dominio* **T** *della specie considerata, e limitata superiormente sopra un segmento* $\mathrm{A_0B_0}$ *apparte-*

[1] Da P_i si passa a P_{i-1} considerando il simmetrico di C_{i+1} rispetto a P_i.

nente a tale dominio, è continua su ogni segmento parallelo (collineare) ad A_0B_0 ***ed avente per estremi due punti interni a*** **T**.

In particolare: ***se una funzione*** **(fx)**, ***convessa nell' intervallo*** **(a, b)**, ***è superiormente limitata in un qualunque tratto di esso, tale funzione è continua in tutto l' intervallo.***

Quest' ultimo enunciato fornisce il perfezionamento che intendevamo apportare al citato teorema di JENSEN.

3. Supponiamo ora che il dominio T sia a due dimensioni e che la funzione convessa $f(P)$ sia superiormente limitata, o, ciò che è lo stesso, continua, sopra due segmenti non paralleli AB, CD di T.

Dico che la nostra funzione è *continua superficialmente* in ogni punto *interno* a T.

Infatti, sia P_0 un tale punto ed ε un numero positivo arbitrario. Per un teorema enunciato nel numero precedente, possiamo sempre determinare in T due segmenti A_0B_0, C_0D_0 con centro in P_0, paralleli ad AB, CD rispettivamente, e tali che per ogni punto L_0 del primo e per ogni punto M_0 del secondo risulti

$$|f(L_0) - f(P_0)| \leq \varepsilon, \quad |f(M_0) - f(P_0)| \leq \varepsilon. \tag{2}$$

Diciamo ora 2δ la minore delle lunghezze dei due segmenti A_0B_0, C_0D_0, e con centro P_0 descriviamo la circonferenza di raggio $\frac{\delta}{2}\operatorname{sen}\theta$, θ essendo l' angolo dei due segmenti in esame. Preso un punto P nell' interno di detto cerchio, costruiamo il segmento L_0M_0 di centro P, avente gli estremi su A_0B_0 e C_0D_0 rispettivamente. Per la supposta convessità della funzione abbiamo

$$2f(P) \leq f(L_0) + f(M_0).$$

Se $f(P) \geq f(P_0)$, se ne trae che

$$2|f(P) - f(P_0)| \leq |f(L_0) - f(P_0)| + |f(M_0) - f(P_0)|,$$

e quindi per le (2)

$$|f(P) - f(P_0)| \leq \varepsilon.$$

Se, invece, $f(P) < f(P_0)$, detto P_1, il simmetrico di P rispetto a P_0 sarà $f(P_1) > f(P_0)$, epperò

$$|f(P) - f(P_0)| \leq |f(P_0) - f(P_1)| \leq \varepsilon.$$

Con ciò resta in ogni caso provato che la funzione $f(P)$ è continua in P_0 (su T).

4. Prima di enunciare il teorema generale col quale chiuderemo il presente scritto, vogliamo accennare brevemente al procedimento che permette di estendere al caso di $n = 3$ il risultato testè conseguito.

Se per i punti L_0, M_0, N_0, variabili su tre segmenti A_0B_0, C_0D_0, E_0F_0 di centro P_0, non complanari, contenuti in un dominio T dello spazio a tre dimensioni, sono verificate simultaneamente le relazioni

$$|f(L_0) - f(P_0)| \leq \varepsilon, \quad |f(M_0) - f(P_0)| \leq \varepsilon, \quad |f(N_0) - f(P_0)| \leq \varepsilon,$$

si riesce facilmente a concludere che in una certa sfera di centro P_0, la funzione $f(P)$, convessa in T, verifica la limitazione

$$|f(P) - f(P_0)| \leq \varepsilon.$$

Basta infatti osservare che, detto P il baricentro del triangolo $L_0M_0N_0$, ha luogo la diseguaglianza

$$3f(P) \leq f(L_0) + f(M_0) + f(N_0),$$

e che scelto comunque il punto P nell'interno di un'opportuna sfera di centro P_0, i punti L_0, M_0, N_0 non escono mai fuori dai segmenti A_0B_0, C_0D_0, E_0F_0.

Queste considerazioni si lasciano evidentemente estendere al caso di $n > 3$.

Possiamo perciò enunciare il seguente teorema generale:

Se una funzione convessa in un dominio **T** *semplicemente connesso e convesso dello spazio ad* n *dimensioni è limitata superiormente su* n *segmenti di* **T** *aventi direzioni indipendenti, essa è continua (su* **T***) in ogni punto interno a tale dominio.*

Napoli, aprile 1928.