BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

GIUSEPPE ALIPRANDI

Sulle evolute delle curve

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (1928), n.3, p. 142–147.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_3_142_0>

Sulle evolute delle curve.

Nota di GIUSEPPE ALIPRANDI (a Padova).

In questa Nota io mi propongo di esporre la teoria delle evolute delle curve del piano e dello spazio, ricorrendo alla rappresentazione funzionale dei punti [1].

[1] V. G. VITALI, *Geometria nello spazio hilbertiano*. Memoria. « Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere e Arti ». Anno Acc. 1927-1928, tomo LXXXVII, parte seconda. Segnatamente i cap. I, II, III, IV.

1. Sia $f = f(t, s)$ l'equazione di una curva γ dello spazio hilbertiano, dove f è una funzione di t a quadrato sommabile in un aggregato G ed s è la lunghezza del suo arco.

Def. – Una curva γ_1 si dirà *evoluta* di γ, se, essendo P un punto di γ, si ha in γ_1 un corrispondente punto P_1 tale che la tangente a γ_1 in P_1 è normale a γ in P.

2. Indichiamo con φ un punto generico di una evoluta di γ, sarà

$$\varphi = f + \rho Y$$

dove ρ è una funzione di s e Y è un parametro normale ortogonale a γ.

Poichè γ_1 deve essere evoluta di γ, dovrà essere

$$(f + \rho Y)' = \lambda Y \tag{1}$$

dove λ è una funzione di s da determinarsi e l'accento indica, qui e in seguito, derivazione fatta rispetto ad s ossia

$$f' + \rho' Y + \rho Y' = \lambda Y. \tag{2}$$

Moltiplichiamo ambo i membri della (2) per Y e integriamo lungo G; poichè per ipotesi è

$$\int_G f' Y dt = 0 \tag{3}$$

e

$$\int_G Y^2 dt = 1$$

e quindi

$$\int_G YY' dt = 0,$$

avremo $\rho' = \lambda$ e quindi la (1) diventa

$$f' + \rho Y' = 0. \tag{1'}$$

Moltiplichiamo ambo i membri della (1') per $X_r (r = 1, 2, ...)$ dove con X_r indichiamo i parametri normali delle rette principali di γ (1)

(1) V. G. VITALI, l. c., pag. 11 e pag. 34.

si ha

$$(4) \qquad 1 + \rho \int_G Y' X_1 dt = 0$$

$$(5) \qquad \int_G X_r Y' dt = 0. \qquad (r = 2, 3, \ldots).$$

Così la determinazione della γ_1 è ricondotta alla ricerca della ρ e della Y in modo che sieno soddisfatte la (4) e le (5).

3. L'elemento lineare $d\sigma$ della γ_1 è dato da (1)

$$d\sigma^2 = \int_G \{[f + \rho Y]'\}^2 dt \cdot ds^2 = \int_G \lambda^2 Y^2 dt \cdot ds^2 = \lambda^2 ds^2 = \rho'^2 ds$$

da cui $d\sigma = \pm \rho' ds$ e, integrando, $\sigma = \pm \rho +$ cost.

D'altra parte il quadrato della distanza di due punti P, P_1, è dato (2) da

$$\int_G (f + \rho Y - f)^2 dt = \int_G \rho^2 Y^2 dt = \rho^2$$

dunque $PP_1 = \pm \sigma$, cioè scegliendo convenientemente il verso e l'origine degli archi, la lunghezza dell'arco della γ_1 risulta eguale alla distanza PP_1 dei punti corrispondenti.

4. Dalla (3) sostituito f' con X_1 e derivando, si ha

$$\int_G Y X_1' dt + \int_G X_1 Y' dt = 0$$

e sostituendo in (4)

$$1 = \rho \int_G Y X_1' dt.$$

Per la formula di Frénet: $X_1' = C_1 \cdot X_2$ — dove in generale C_r $(r = 1, 2, \ldots)$ indicano le curvature di γ — abbiamo

$$(6) \qquad 1 = \rho C_1 \int_G X_2 Y dt.$$

(1) V. G. Vitali, l. c., pag. 30.
(2) V. G. Vitali, l. c., pag. 17.

5. Supponiamo che γ sia nel piano. La Y coincide con X_2 quindi

$$\int_G X_2 Y dt = \int_G X_2^2 dt = 1 \tag{7}$$

e la (6) dà

$$\rho = \frac{1}{C_1}. \tag{8}$$

Il valore di ρ trovato, soddisfa alla ulteriore condizione

$$\int_G X_2 Y' dt = 0.$$

Invero dalla (7), derivando, si ha

$$\int_G X_2' Y dt + \int_G X_2 Y' dt = 0.$$

Ma per la formula di Frénet: $X_2' = - C_1 X_1$ e per la (3), si ha

$$\int_G X_2 Y' dt = - C_1 \int_G X_1 Y dt = 0.$$

Esiste dunque per ogni curva piana una ed una sola evoluta la cui equazione è

$$\varphi = f + \frac{1}{C_1} \cdot X_2.$$

6. Se la curva è nello spazio ordinario e non piana, posto

$$R_1 = \int_G X_2 Y dt \tag{9}$$

derivando la (9) e tenendo presente le (5) si ha

$$R_1' = \int_G X_2' Y dt.$$

Per la formula di Frénet e per la (3), si ha

$$R_1' = C_2 \int_G X_3 Y dt - C_1 \cdot \int_G X_1 Y dt = C_2 \int_G X_3 Y dt. \tag{10}$$

Se ω è l'angolo della PP_1 con la terza retta normale principale, si ha

$$\int_G X_2 Y dt = \operatorname{sen} \omega$$

$$\int_G X_3 Y dt = \cos \omega$$

e dalle (9), (10):

(11) $$R_1 = \operatorname{sen} \omega$$

(12) $$R_1' = C_2 \cdot \cos \omega.$$

Derivando la (11) e confrontando con la (12), si ottiene

$$\cos \omega \cdot \omega' = C_2 \cdot \cos \omega,$$

da cui

$$\omega' = C_2 \quad \text{oppure} \quad \cos \omega = 0.$$

e quindi

$$\omega = \int_G C_2 ds \quad \text{oppure} \quad \omega = \frac{\pi}{2};$$

e, corrispondentemente,

(13) $$\begin{cases} \int_G X_2 Y dt = \operatorname{sen} \int_G C_2 ds \\ \int_G X_3 Y dt = \cos \int_G C_2 ds \end{cases}$$

e

(14) $$\begin{cases} \int_G X_2 Y dt = 1 \\ \int_G X_3 Y dt = 0. \end{cases}$$

Le due soluzioni trovate (13) e (14), verificano entrambe la (4) e la (5) per $r = 2$; ma esse debbono anche verificare la (5) per $r = 3$, cioè la

(15) $$\int_G X_3 Y' dt = 0.$$

Dico che la (15) è soddisfatta dalla seconda delle (13) e non dalla seconda delle (14).

La (13) soddisfa la (14). Infatti derivando la seconda delle (13) si ha:

$$\int_G X'_3 Y dt + \int_G X_3 Y' dt = -\operatorname{sen}\int_G C_2 ds \cdot C_2 .$$

E, per la formula di FRENET: $X_3' = - C_2 \cdot X_2$ si ha

$$- C_2 \int_G X_2 Y dt + \int_G X_3 Y' dt = -\operatorname{sen}\int_G C_2 ds \cdot C_2$$

e ricordando la prima delle (13), consegue la (15).

Le (14) non soddisfano in quanto derivando la seconda delle (14) consegue

$$\int_G X_3' Y dt + \int_G X_3 Y' dt = 0$$

e poichè $X_3' = - C_2 X_2$ si trova

$$C_2 = \int X_3 Y' dt.$$

Se la (15) fosse verificata, si dovrebbe avere $C_2 = 0$ e la curva sarebbe piana contro l'ipotesi.

Si conclude che per una curva gobba dello spazio, c'è una semplice infinità di evolute, corrispondenti alle (13) e per le quali si hanno le equazioni

$$(16) \qquad \varphi = f + \frac{Y}{C_1 R_1} = f + \frac{1}{C_1 \operatorname{sen}\int_G C_2 ds} \left\{ X_2 \cdot \operatorname{sen}\int_G C_2 ds + X_3 \cos\int_G C_2 ds \right\}$$

ossia

$$\varphi = f + \frac{1}{C_1} X_2 + \frac{1}{C_1} \operatorname{cotg}\int_G C_2 ds \cdot X_3 .$$

In questa equazione figura una costante arbitraria, in quanto vi figura un integrale indefinito.

7. Consideriamo due evolute γ_1, γ_2 e sieno P_1 e P_2 i loro punti corrispondenti del punto P di γ. Le due direzioni PP_1, PP_2 formano con X_3 angoli i cui coseni sono dati da due integrali indefiniti di C_2 e quindi differiscono per una costante. Si può dire che da un punto generico di γ, due punti corrispondenti delle due evolute, sono visti sotto angolo costante.