UMI

Recensioni

* Louis De Broglie: La Mécanique ondulatoire
* G. Verriest: Cours de Mathématiques générales à l'usage des étudiants en sciences naturelles
* G. Julia: Cours de Cinématique
* L. P. Eisenhart: Non riemannian Geometry

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (1928), n.3, p. 152–161.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_3_152_0>

RECENSIONI

La Mécanique ondulatoire, par LOUIS DE BROGLIE, 1928.

È questo il primo fascicolo d'una raccolta intitolata « Mémorial des Sciences Physiques » che vien pubblicata sotto gli auspici dell'Accademia delle Scienze di Parigi e di altre Accademie di Europa, sotto la direzione dei Signori H. VILLAT e J. VILLEY. L'argomento è nuovissimo e in pieno sviluppo; il DE BROGLIE, che è un iniziatore della nuova teoria, era ben competente a darne una sintesi adatta ad orientare gli studiosi in queste modernissime ricerche.

Nella meccanica classica, la materia è un *quid* che ha una esistenza propria indipendente dall'ambiente in cui si muove. Questo modo di vedere è oggi contraddetto da una grande quantità di fenomeni elettromagnetici; fra la materia e lo spazio fisico esistono senza dubbio legami assai intimi. Un passo ardito per introdurre questi legami fu già compiuto da EINSTEIN con la teoria della relatività; un altro, che sembra maggiore, è stato ora iniziato con la meccanica ondulatoria da DE BROGLIE e da SCHRÖDINGER, che vien considerata, rispetto alla meccanica classica, in un rapporto analogo a quello che passa fra l'ottica ondulatoria e l'ottica geometrica.

La meccanica ondulatoria considera il punto materiale come una singolarità in seno a un fenomeno di natura periodica. Questo può essere descritto da un osservatore O, rispetto al quale il punto materiale è in moto rettilineo e uniforme con la velocità v, mediante una formula del tipo

$$u(xyzt) = f\left(x,\ y,\ \frac{z - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \operatorname{sen} 2\pi\nu\left(t - \frac{\beta z}{c}\right), \qquad \begin{cases} \beta = v : c \\ \nu = \dfrac{\nu_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

cioè mediante un'onda la cui amplitudine f si sposta lungo Oz con la velocità v e che ha la velocità di fase $V = c : \beta = c^2 : v\ (> c)$. Si ammette che l'amplitudine f abbia costantemente una *singolarità* per $x = y = 0$, $z = vt$; *questa traduce analiticamente l'esi-*

stenza del punto materiale O_1, che occupa alla fine del tempo t la posizione $x = y = 0$, $z = vt$. La ν_0 caratterizza la frequenza propria dell' onda (cioè rispetto a un osservatore collegato con O_1); il numero $n = c : V$ vien chiamato l' *indice di rifrazione dello spazio.* Rispetto all' osservatore O è uguale a $\sqrt{1 - \nu_0^2 : \nu^2}$.

Si dimostra allora facilmente che la velocità V di O_1 coincide con la velocità del gruppo di onde corrispondenti alle frequenze ν e alla legge di dispersione $\sqrt{1 - \nu_0^2 : \nu^2}$. In base a ciò si è condotti a identificare il punto materiale con un gruppo d' onde, e si trova che la f soddisfa all' equazione classica

$$\Delta f = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}. \tag{0}$$

Dato che in O_1 ci deve essere una singolarità, e supponendo che il punto materiale abbia una simmetria sferica, si deduce (rispetto ad O)

$$u = \frac{c}{\sqrt{x^2 + y^2 + \frac{(z - vt)^2}{1 - \beta^2}}} \operatorname{sen} 2\pi\nu\left(t - \frac{z}{V}\right).$$

Questa è dunque la rappresentazione del punto materiale a simmetria sferica mediante un fenomeno ondulatorio.

Dopo ciò si riesce a definire le grandezze meccaniche energia e quantità di moto mediante le caratteristiche del moto ondulatorio: $W = h\nu$ (h costante di PLANK) è la definizione dell' energia; $h\nu/v$ quella della quantità di moto (come vettore ha la direzione della tangente). Questa è in succinto la chiara introduzione alla meccanica ondulatoria che l' illustre Autore espone nel Cap. I dell' opuscolo in esame.

Dopo un rapido riassunto del principio di HAMILTON nella meccanica di EINSTEIN e delle sue note conseguenze, l'A. passa nel Cap. III a rappresentare il moto d' un punto materiale in un campo costante mediante la propagazione d' un gruppo d' onde che possiede un punto singolare definito da una concordanza di fase.

Le componendi monocromatiche di tipo sinusoidale d'un gruppo soddisfano all' equazione

$$\Delta u + \frac{4\pi^2\nu^2 n^2}{c^2} u = 0$$

derivata dalla (0), e sono rappresentate da

$$u = f(xyz) \cos 2\pi\nu\,(t - \psi(xyz)). \tag{1}$$

La fase di un' onda è la stessa al tempo t sopra ogni superficie ψ = cost (superficie di equifase). *I raggi dell' onda* sono le traiettorie normali alle $\psi = \text{cost}$; la velocità secondo cui un punto dovrebbe muoversi lungo il raggio per accompagnare una data fase è data da

$$\left[\sum\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

L' ottica geometrica ammette che sia precisamente

$$\frac{1}{V^2} = \sum\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2, \tag{2}$$

dalla qnale seguono i principî di HUYGHENS e di FERMAT.

L' integrale di questa equazione sia $\psi(x, y, z, a, b) = \text{cost}$. Se si considera ora un gruppo d' onde la cui frequenza sia compresa fra $\nu - \delta\nu$ e $\nu + \delta\nu$, per le quali i parametri a e b variano fra $a - \delta a$, $a + \delta a$, $b - \delta b$ e $b + \delta b$, e si determina il moto del punto ove esiste concordanza di fase, si trovano l' equazioni

$$\frac{\partial\psi}{\partial a} = a_1, \quad \frac{\partial\psi}{\partial b} = b_1, \quad \frac{\partial(\nu\psi)}{\partial\nu} = t - c_1. \tag{3}$$

Le due prime definiscono le traiettorie, l' altra il moto su queste. Le traiettorie tagliano ad angolo retto le $\psi = \text{cost}$.

Ora si ammetta che la regione dello spazio ove esiste un campo caratterizzato da un potenziale $F(xyz)$ abbia l' indice di rifrazione

$$n = \frac{c}{V} = \sqrt{\left(1 - \frac{F}{c\nu}\right)^2 - \frac{\nu_0^2}{\nu^2}}$$

(che si riduce a $\sqrt{1 - \nu_0^2 : \nu^2}$ per $F = 0$). Se la F non varia troppo rapidamente, si può prendere come soluzione approssimata della (1)

$$u = C \cos 2\pi\nu\left(t - \int\frac{nds}{c}\right) \qquad \left(\psi = \int\frac{nds}{c}\right) \tag{4}$$

l' integrazione essendo estesa a un raggio dell' onda. Il punto materiale, identificato col punto di concordanza di fase, ha un moto definito dalle (3). Invero la sua azione hamiltoniana è $Wt - S\,(S = h\nu\psi)$; talchè si dimostra che dall' equazione (2) deriva direttamente l' equazione di JACOBI (forma relativistica)

$$\sum\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 = \frac{h^2\nu^2}{V^2} = \frac{h^2\nu^2}{c^2}\left[\left(1 - \frac{F}{h\nu}\right)^2 - \frac{\nu_0^2}{\nu^2}\right]$$

che dà gl' integrali del moto

$$\frac{\partial S}{\partial a} = a_1, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = b_1, \quad \frac{\partial S}{\partial \omega} = t - c_1$$

identici a (3). Ma quando F varia troppo rapidamente, in guisa che non vale più la (4), non si può più ricorrere all'equazione della dinamica; occorre studiare direttamente l'equazione delle onde.

Lo studio dei campi variabili forma l'argomento del Cap. IV. L'A. procede per induzione. Posto $u = e^{KS}$, la classica equazione di propagazione si trasforma nella equazione di JACOBI precedente:

$$\sum\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{V^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = \frac{h\nu^2}{V^2}\,.$$

Allora con procedimento inverso, partendo dall'equazione di JACOBI nel caso della esistenza del campo variabile $P\,(xyzt)$, cioè da

$$\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} - F\right)^2 - \sum\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 = m_0{}^2c^2. \tag{5}$$

perviene all'equazione generale di propagazione:

$$\Delta u - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{4\pi i F}{c^2 h}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{4\pi^2}{h^2}\left(\frac{F^2}{c^2} - m_0{}^2c^2\right)u = 0. \tag{6}$$

Anche qui l'equazioni

$$\frac{\partial S}{\partial a} = a_1\,, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = b_1\,, \quad \frac{\partial S}{\partial c} = c_1\,,$$

ove S è un integrale completo della (5), danno il moto del punto di concordanza in fase (il punto materiale) appartenente a un gruppo d'onde le cui fasi S corrispondono a valori vicinissimi dei 3 parametri. Ma lo studio delle traiettorie e del moto su quelle non si scinde più in due problemi separati, come nelle (3).

L'A. applica queste considerazioni al moto dell'elettrone in un campo elettromagnetico qualunque. Trova che lo spazio si comporta come un mezzo anisotropo e birifrangente: la direzione di propagazione della fase non coincide in generale col raggio.

Nel Cap. V si passa dal problema d'un sol punto a quello ben più complesso di N punti tra i quali si esercitano delle azioni mutue dipendenti dalle loro distanze.

Lo spazio dove si muove il sistema è sede di N onde, ciascuna delle quali presenta una singolarità: la propagazione di ogni onda è regolata dalla posizione simultanea delle singolarità nelle $N-1$ rimanenti. La propagazione della i^{sima} onda, note quelle delle altre, è regolata dalla (6), posto $u = u_i$. Se valgono anche qui i procedimenti dell'ottica geometrica, si troveranno l'equazioni *individuali* come è stato esposto di sopra; ma nel caso opposto non si può più dire se le onde ammettono sempre una singolarità. L'A. accenna a un modo proposto da SCHRÖDINGER per vincere questa difficoltà, il quale conduce all' unica equazione di propagazione

$$\sum_1^N \frac{1}{m_i}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y_i^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z_i^2}\right]+\frac{8\pi^2}{h^2}\left[H-F(x_1 x_2 \ldots . x_N t)\right]u=0$$

ove H sta a rappresentare l' energia del sistema, valida in prima approssimazione (trascurando la relatività). Ma all' A. stesso non pare accettabile questa conclusione.

Molto interessante è il breve Cap. III dove l' A. fa un tentativo per spiegare nella teoria dei *quanta di luce* i fenomeni di interferenza e di rifrazione. Non si può farsene una idea esatta senza leggerlo tutto.

Nel Capitolo seguente è trattata la stabilità dei moti periodici. Dopo un opportuno riassunto della teoria, ormai ben nota, sviluppata da PLANK, BOHR, EINSTEIN e SOMMERFELD intorno ai quanta, l' A. passa a interpretare le condizioni di stabilità (o di quantizzazione) nella meccanica ondulatoria.

Se ci si accontenta della approssimazione newtoniana e si ritengono valide le soluzioni dell' ottica geometrica, si può assumere

$$u=A\cos\frac{2\pi}{h}\left[Wt-S(xyz)\right].$$

S essendo un integrale completo dell' equazione di JACOBI. Affinchè la fase di u abbia in ogni punto ove si effettua il moto un valore determinato, è necessario e basta che per ogni curva (c) della regione risulti

$$\int_c dS=nh.$$

È la legge generale di EINSTEIN. Si ha così una notevole interpretazione della misteriosa condizione dei quanta.

Ma nei casi più importanti, in particolare nei moti entro agli atomi, cotesta approssimazione (validità dell' ottica geometrica) non è sufficiente. Occorre determinare con esattezza le vibrazioni proprie corrispondenti all' equazione di propagazione, imponendo alle soluzioni certe condizioni e deducendo poi le energie stabili dalla relazione $W=h\nu$.

Secondo SCHRÖDINGER la condizione da imporre a u è questa: *di essere ovunque finita e continua, e nulla all' infinito.* Il problema si può allora impostare così (appross. newtoniana): *Trovare i valori di* E *pei quali l'equazione*

$$(8)\qquad \Delta u + \frac{8\pi^2 m_0}{h^2}(E - F)\,u = 0$$

ammette delle soluzioni finite, continue e nulle all'infinito: problema d'un tipo noto, che si riduce alla risoluzione d'una equazione di FREDHOLM. Ad ogni autovalore di questa corrisponde un valore della energia E: sono le energie degli stati stazionari (stabili).

Le funzioni fondamentali u_i corrispondenti possono essere ortogonali o no. Questo secondo caso s'incontra nei moti che furono detti *degeneri* da BOHR e SOMMERFELD, nei quali ci sono diverse configurazioni stabili per uno stesso valore quantizzato della energia.

Le applicazioni di questo metodo formano l'argomento del Cap. VIII. È un riassunto delle note ricerche di SCHRÖDINGER, ora raccolte in un volume: *Stati stabili dell'atomo a un solo elettrone; effetto Zeeman*. I risultati sono d'accordo con quelli della teoria di BOHR e SOMMERFELD.

Ma l'accordo non sussiste più in altri casi: ad esempio nell'oscillatore lineare. In questo caso si dimostra che l'equazione di propagazione corrispondente alla (8) non ammette una soluzione finita e continua ovunque, se $2\pi E : h\omega$ (ω frequenza dell'oscillatore) non è un numero intero dispari. I livelli d'energia sono allora definiti da

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)h\omega \qquad (n = 0,\ 1,\ 2\ldots)$$

Questa formula, detta *dei mezzi-quanta*, era stata dapprima suggerita dall'esperienza: la nuova meccanica la giustifica.

Se poi si tien conto della relatività, si può correggere la nota formula di SOMMERFELD relativa alla struttura fine, la quale non è risultata in buon accordo con le più recenti esperienze.

Infine l'ultimo capitolo è dedicato a due metodi d'approssimazioni successive. Uno è dovuto a L. BRILLOUIN e G. VENTZEL: l'altro a SCHRÖDINGER. Questo Autore ha sviluppato un calcolo delle perturbazioni che corrisponde a quello classico della meccanica ordinaria. Il problema è posto così: « Noti gli stati stazionari d'un sistema in determinate condizioni, determinare i nuovi stati stazionari quando coteste condizioni vengono leggermente modificate ». Lo studio analitico vien fatto per mezzo dell'equazioni integrali.

L'opuscolo si chiude con queste parole: « La nouvelle mécanique ondulatoire ouvre des horizons nouveaux sur le sens profond des phénomènes dynamiques. Elle a rendu et rendra de signalés services à la physique de l'atome, elle nous fournit des armes nouvelles pour nous attaquer aux redoutables problèmes de la matière et du champ déjà soulevés par la théorie de la rélativité ». Ed è per questo, noi ripetiamo, che il prezioso lavoro del De Broglie sarà bene accolto dagli studiosi che vogliono orientarsi in queste nuove ricerche. *p. b.*

G. Verriest: *Cours de Mathématiques générales à l'usage des étudiants en sciences naturelles.* Première partie. Paris, Gauthier-Villars, 1928, pag. VIII-344.

Questa opera è la riproduzione di un corso di lezioni fatte dall'Autore a quei studenti dell'Università di Lovania che aspirano alla Laurea in Chimica: laurea istituita in quella Università allo scopo di ottenere chimici ben preparati tanto per la ricerca scientifica quanto per le applicazioni industriali. Dall'esame di questa prima parte dell'opera, che è dedicata agli elementi della Geometria analitica e del Calcolo differenziale, ci pare che l'Autore abbia raggiunto egregiamente il suo scopo: tanto per la notevole chiarezza dell'esposizione, quanto per l'opportuna disposizione della materia e per l'ottima scelta degli esempi, in parte presi dalla Geometria, ma più spesso dalla Fisica, conformemente all'indirizzo degli studenti cui il libro è destinato. Data l'indole dell'opera, è naturale che le dimostrazioni vi siano fondate piuttosto sull'intuizione che su rigorose deduzioni logiche, che avrebbero richiesto ben altro sviluppo; tuttavia, vi è sufficientemente insistito su diversi punti teorici, in particolare su quello di differenziale: per quanto le osservazioni a pag. 117 e quelle a pag. 145 non sembrino perfettamente concordanti. I 20 Capitoli in cui si divide questa prima parte, e che sono tutti preceduti da una opportuna indicazione sommaria del contenuto, trattano:

I. Dei limiti. - II. Dei logaritmi. - III. Delle funzioni. - IV. Dei principî di Geometria analitica. - V. Della derivata e del differenziale. - VI. Delle applicazioni della derivata. - VII. Delle proprietà della derivata. - VIII. Delle derivate e differenziali successivi. - IX. Della formula di Taylor. - X. Delle espressioni indeterminate. - XI. Dei massimi e minimi. - XII. Della costruzione di curve. - XIII. Delle funzioni composte. - XIV. Del differenziale totale. - XV. Delle derivate parziali successive. - XVI. Della differenziazione delle funzioni implicite. - XVII. Dell'utilità del differenziale. - XVIII. Delle applicazioni geometriche. - XIX. Delle sezioni coniche. - XX. Delle coordinate polari. (*u*).

G. JULIA: *Cours de Cinématique.* (Paris, Gauthier-Villars, 1928, pag. 148).

In questo volumetto sono trattati i classici argomenti della cinematica riguardanti il movimento di un punto e di un corpo solido; epperò non è il caso di farne una recensione particolareggiata. L' esposizione piace per la sua esattezza e per i molti particolari che soddisfano il gusto matematico e specialmente quello geometrico, giacchè il chiaro A. espone, ad esempio, una minuta analisi delle proprietà geometriche delle traiettorie dei punti di un corpo mobile all' istante t.

Lo strumento di calcolo usato dall'A. nello svolgimento della materia è prevalentemente cartesiano, sebbene qua e là si introduca il concetto di vettore.

Si vede che l' egregio Autore ha conoscenza dei vantaggi che presenta il calcolo vettoriale nella trattazione di cotesti argomenti; cosicchè non si comprende come non abbia voluto trarne maggior profitto. È ben certo che coteste questioni si possono svolgere in maniera più semplice, più intuitiva ed espressiva mediante l' uso del calcolo vettoriale, nella forma elaborata specialmente dagli autori italiani, lasciando l' impiego delle coordinate a quelle applicazioni dove si rendono necessarie.

Non per questo s' intende diminuire il valore intrinseco dell' opera pubblicata dal prof. JULIA, pregevole per chiarezza e precisione e che quindi merita attenzione da parte degli studiosi.

m. m.

L. P. EISENHART: *Non riemannian Geometry.* (New York, pubbl. dalla « American Mathematical Society », 1927, pagg. VIII-184).

In quest' opera l'A. espone lo stato attuale delle ricerche — sovrattutto per quanto riguarda i risultati della scuola americana di cui egli è uno degli iniziatori — in quella nuova branca della Geometria differenziale, generalizzazione della Geometria riemanniana, che secondo CARTAN vien detta *teoria delle varietà a connessione affine.* Questa teoria, dalla scuola americana viene considerata sovrattutto sotto un aspetto particolare, e indicata con una denominazione che appunto con questa particolare veduta si connette: *Geometry of paths*, che tradurrò, secondo BOMPIANI, in *Geometria dei cammini.*

Che cosa è questa *Geometria dei cammini*? Secondo VEBLEN (¹), essa è la teoria di un qualunque sistema di curve analitiche in una varietà n-dimensionale, tali che ciascun punto di questa sia congiunto a un altro punto posto in un intorno opportunamente ristretto di esso, da una e una sola curva del sistema. Una *Geometria dei cammini* in questo senso generale è stata recentemente studiata dal DOUGLAS (²); EISENHART e VEBLEN hanno iniziato nel 1922 lo studio del caso particolare in cui il sistema supposto è costituito dalle curve integrali di un sistema differenziale del tipo

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds} + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = 0, \qquad (\lambda = 1, 2,\dots n)$$

cioè, appunto, dalle *geodetiche di una varietà a connessione affine*. La *Geometria dei cammini* corrispondente è, propriamente parlando, la teoria delle proprietà di una tale varietà a connessione affine, che restano invarianti per ogni trasformazione della connessione, che non ne muti le geodetiche (ossia i « cammini »); cioè, secondo WEYL, per ogni trasformazione *proiettiva* della connessione. E in effetto, la cospicua serie di lavori iniziata come ho detto nel 1922 (³) — e proseguita ad opera specialmente di EISENHART, VEBLEN, T. Y. THOMAS, J. M. THOMAS, e anche di H. LEVY, M. S. KNEBELMAN e di altri — ha in vista specialmente la *projective Geometry of paths*, cioè la geometria dei « cammini » nel senso proprio, poco sopra chiarito; senza però trascurare lo studio delle proprietà di carattere *affine* della connessione (*affine Geometry of paths*).

L'esposizione di queste nuove ed interessanti teorie, che l'A. ci porge nel presente lavoro, ha quegli stessi pregi di chiarezza e semplicità che rendono tanto utile ed attraente l'opera precedente: *Riemannian Geometry* (da lui pubblicata nel 1926), di cui questa vuol essere una continuazione ed un complemento. Anche il presente volume sarà dunque un'utilissima guida per chi voglia istradarsi in queste nuove teorie geometriche. Va notato soltanto che anche qui (come nella R. G.) l'A. segue un indirizzo prettamente analitico: forse in qualche punto si potrebbe desiderare di veder meglio lumeggiata l'essenza geometrica delle questioni trattate.

Ma verrò a dare un breve sommario dell'opera. Il I Capitolo (*Connessioni asimmetriche*) e il II Capitolo (*Connessioni simmetri-*

(¹) O. VEBLEN, *Remarks on the foundations of geometry*. (« Bull. Amer. Math. Society », vol. 31, 1925, pp. 121-141), p. 128.

(²) J. DOUGLAS, *The general geometry of paths*. (« Annals of Mathem. », ser. 2, vol. 29, 1928, pp. 143-168).

(³) dei quali alla fine del presente volume vien data una completa bibliografia.

che) studiano la *Geometria affine dei cammini*, nel caso generale e poi nel caso in cui la connessione è *simmetrica* (SCHOUTEN) cioè *senza torsione* (CARTAN). I risultati esposti sono specialmente estensioni di noti risultati della geometria riemanniana; degni di nota fra l'altro: lo studio dei campi di vettori paralleli, del trasporto ciclico, delle direzioni associate, delle n-ple di congruenze (per le quali sono strumento di studio gli invarianti $\gamma_{\mu}{}^{\nu}{}_{\sigma}$, estensione dei coefficienti di rotazione di RICCI) nel Cap. I; (in cui vanno anche notati, fra i risultati che non hanno l'equivalente nella geometria riemanniana, la determinazione *intrinseca* di un tensore fondamentale per una metrica, e lo studio delle trasformazioni della connessione che conservano il parallelismo); la generalizzazione delle coordinate riemanniane e del teorema di FERMI, l'introduzione delle nozioni di *tensori normali*, di *estensioni* di un tensore (1) nel Cap. II.

Il Cap. III è, a mio parere, il più importante: esso è dedicato alla *Geometria proiettiva dei cammini*. Dopo l'esposizione dei noti risultati di WEYL sulle trasformazioni proiettive della connessione affine (simmetrica) l'A. espone molti importanti risultati della scuola americana. Ricorderò fra l'altro, l'introduzione dei « coefficienti di una connessione proiettiva » secondo T. Y. THOMAS; della connessione affine normale; delle coordinate proiettive normali, collegate al supposto sistema di coordinate curvilinee in modo che quando queste subiscono una qualsiasi trasformazione, quelle si mutano secondo le formule di una trasformazione *lineare fratta*; gli studi sugli spazi nei quali le equazioni dei « cammini » ammettono degli *integrali primi omogenei*. Infine, l'interessante ricerca degli spazi che ammettono *gruppi continui di collineazioni in sè*.

Il Cap. IV è dedicato alla *geometria degli spazi subordinati* in una varietà a connessione affine. Come nella R. G., l'A. comincia dallo studio delle ipersuperficie, che svolge più ampiamente (estendendo, tra l'altro, le nozioni di *direzioni coniugate*, di *linee asintotiche*, di *linee di curvatura*) e viene poi agli spazi subordinati di dimensione qualunque. Un indice bibliografico, come ho già accennato, conclude l'opera.

ENEA BORTOLOTTI

(1) L'*estensione* p^{ma}, $T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s ;\, \gamma_1 \dots \gamma_p}$, (pag. 73) di un tensore $T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s}$, come la *derivata covariante* p^{ma} $T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s ,\, \gamma_1 \dots \gamma_p}$ (con la quale coincide per $p = 1$) in uno spazio *piano* si riduce a $\dfrac{\partial^p T^{\alpha_1 \dots \alpha_r}_{\beta_1 \dots \beta_s}}{\partial x^{\gamma_1} \dots \partial x^{\gamma_p}}$; a differenza della derivata covariante, l'estensione p^{ma} è *simmetrica* rispetto ai p indici $\gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_p$.