
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

ANTONIO COLUCCI

Un teorema sulle funzioni seinicontinue

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **7** (1928), n.4, p. 185–187.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_4_185_0>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1928.

Un teorema sulle funzioni semicontinue.

Nota di ANTONIO COLUCCI (a Napoli).

1. Il Sig. W. SIERPINSKI in una sua recente Nota intitolata: *Sur une propriété des fonctions semi-continues* ⁽¹⁾, dimostra un notevole teorema sulle funzioni semicontinue, di cui un corollario può considerarsi come una generalizzazione del classico teorema di CANTOR sulla uniforme continuità di una funzione continua in un intervallo finito.

Il teorema è il seguente:

« $\varphi(x)$ étant une fonction semi-continue supérieurement dans un intervalle fini (a, b) et $\psi(x)$ étant une fonction semi-continue inférieurement dans (a, b) , telles que

$$\varphi(x) < \psi(x) \quad \text{pour } a \leq x \leq b,$$

il existe un nombre positif δ , tel que pour tous les nombres x et x' de (a, b) l'inégalité

$$|x - x'| \leq \delta$$

entraîne l'inégalité

$$\varphi(x) < \psi(x') - \delta ».$$

Lo scopo della presente Nota è di stabilire un teorema generale sulle funzioni semicontinue di punto, del quale il teorema di SIERPINSKI testè enunciato è una conseguenza particolarissima e presso che immediata.

2. TEOREMA. — Se la funzione $f(P)$ definita in un insieme limitato e chiuso A dello spazio $S_{(r)}$ è ivi semicontinua inferiormente, e se, inoltre, in un insieme chiuso B contenuto in A ed asintotico ad $A - B$ è sempre

$$f(P) > 0,$$

allora è possibile determinare due numeri positivi ρ ed ω tali da aversi

$$f(P) > \omega$$

in tutti i punti di A aventi da B distanza non maggiore di ρ ⁽²⁾.

⁽¹⁾ « Fundamenta Mathematicae », tomo IX, pp. 1-2 (Varsavia, 1927).

⁽²⁾ Il teorema regge anche senza l'ipotesi dell'asintotismo dei due insiemi $A - B$ e B , ma in tale caso quello che si guadagna in generalità si perde in interesse.

Per la dimostrazione consideriamo due successioni di numeri positivi decrescenti

$$(1) \quad \omega_1 > \omega_2 > \dots > \omega_n > \dots, \quad \rho_1 > \rho_2 > \dots > \rho_n > \dots,$$

e supponiamo che

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \omega_n = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n = 0.$$

Ciò posto, denotiamo con A_i l'insieme dei punti di A verificanti la condizione

$$f(P) \leq \omega_i,$$

e con B_i quello formato dai punti di A aventi da B distanza non maggiore di ρ_i .

Dalla supposta semicontinuità inferiore della funzione $f(P)$ nell'insieme chiuso A , segue, in virtù di un noto teorema ⁽¹⁾, che l'insieme A_i , quando esiste, è del pari chiuso.

Passando al secondo insieme B_i , il quale non risulta mai vuoto, anzi contiene l'insieme B ed infiniti punti di $A - B$, si scorge subito che anch'esso è un insieme chiuso. Invero un punto limite M di B_i è ancora un punto di A , e la sua distanza da B non può superare ρ_i ; chè se, ad es., tale distanza fosse eguale a $\rho_i + \sigma$, i punti di B_i contenuti in un intorno circolare di centro M e raggio $\frac{\sigma}{2}$ risulterebbero ad una distanza da B maggiore od eguale a $\rho_i + \frac{\sigma}{2}$.

Mettiamo ora in corrispondenza delle due successioni numeriche (1) la seguente successione di *insiemi chiusi*

$$(3) \quad A_1 B_1, \quad A_2 B_2, \dots, \quad A_n B_n, \dots$$

ognuno dei quali, a partire dal secondo, è *contenuto nel precedente*.

Dico che da un certo valore dell'indice n in poi *tutti* gli insiemi della (3) risultano vuoti.

Infatti, se così non fosse, esisterebbe ⁽²⁾ (almeno) un punto P_0 comune a tutti gli insiemi in esame, e si avrebbe

$$P_0 B \leq \rho_i, \quad f(P_0) \leq \omega_i \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

⁽¹⁾ M. PICONE, *Lezioni di Analisi Infinitesimale*, vol. I, parte 1^a, p. 88. (« Circolo Matematico di Catania », Catania, 1923).

⁽²⁾ M. PICONE, loc. cit., p. 57.

e quindi, a causa delle (2), e per essere l'insieme B chiuso, in un punto di B la $f(P)$ avrebbe valore *non positivo*, il che contraddice ad una ipotesi da noi fatta.

Detto dunque m l'indice di uno degli insiemi vuoti della successione (3) (per es. del primo insieme vuoto che si incontra percorrendo la successione), si ha che per tutti i punti di B_m , cioè per tutti i punti P di A pei quali

$$PB \leq \rho_m,$$

risulta

$$f(P) > \omega_m.$$

Il teorema resta così completamente dimostrato.

È chiaro che una proprietà perfettamente analoga vale per le funzioni *semicontinue superiormente*.

3. L'insieme A si riduca qui al dominio quadrato Q del piano (x, x') , definito dalle limitazioni

$$a \leq x \leq b, \quad a \leq x' \leq b,$$

e l'insieme B alla diagonale di estremi (a, a) , (b, b) .

Se le funzioni $\varphi(x)$ e $\psi(x')$ sono quelle considerate nel n.º 1, posto

$$f(x, x') = \psi(x') - \varphi(x),$$

si trae che $f(x, x')$ è semicontinua inferiormente in Q , e nei punti di B è sempre

$$f(x, x') = f(x, x) > 0.$$

In virtù del teorema precedente, siamo dunque in grado di asserire che è sempre possibile trovare due numeri positivi

$$\rho = \frac{\delta}{\sqrt{2}}, \quad \omega = \delta, \quad \text{tali da aversi}$$

$$f(x, x') > \delta$$

in tutti i punti di Q per i quali risulta

$$\frac{|x - x'|}{\sqrt{2}} \leq \rho.$$

Si ritrova, in tal modo, il teorema di SIERPINSKI enunciato in principio.

Napoli, 9 settembre 1928.