
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LETTERIO LABOCCETTA

Metodo generale per rendere periodiche delle funzioni qualsiasi rappresentate da serie

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. 7 (1928), n.5, p. 237–243.

Unione Matematica Italiana

<[http:](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_5_237_0)
[//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_5_237_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_5_237_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1928.

**Metodo generale per rendere periodiche
delle funzioni qualsiasi rappresentate da serie.**

Nota di LETTERIO LABOCCETTA (a Roma).

Se si ha una funzione $y = f(x)$ analiticamente definita in un intervallo (a, b) ed alla variabile x si sostituisce una funzione periodica $\varphi_\pi(x)$ della variabile stessa che ha come periodo il detto intervallo, la funzione data si trasforma in un'altra $y_1 = f[\varphi_\pi(x)]$ che è periodica ed ha anch'essa l'intervallo (a, b) come periodo. In genere però non si ha nell'intervallo (a, b) coincidenza delle due funzioni. Affinchè in tale intervallo sia $f(x) = f[\varphi_\pi(x)]$ bisogna che $\varphi_\pi(x)$ sia, in ogni periodo, o in ogni intervallo del periodo se questo comprende più intervalli parziali, una funzione lineare della variabile e quindi una di quelle funzioni periodiche che per la forma dei loro diagrammi sono dette poligonali.

Mi propongo qui di mostrare quali siano le funzioni poligonali da adoperare nei diversi casi, estendendo ulteriormente, con particolari riguardo alle funzioni espresse da serie, il metodo già esposto in una mia Nota ⁽¹⁾ sulla rappresentazione analitica in forma finita delle funzioni i cui diagrammi sono costituiti da uno o più archi di curve di natura qualsiasi periodicamente ripetuti.

1. Se è c il valore dell'intervallo che si vuole assumere come periodo e nel quale la funzione è definita, e l'estremo sinistro di

(1) « R. C. Acc. Naz. dei Lincei », 22 aprile 1923.

questo intervallo cade nell'origine, la funzione $y = f(x)$ si rende periodica ponendo in essa $c \operatorname{Fr} \frac{x}{c}$ invece di x

$$(1) \quad y = f\left(c \operatorname{Fr} \frac{x}{c}\right).$$

Qui con il simbolo $\operatorname{Fr} x$ è indicata la funzione « *frazione di x* » (cioè $x - Ix$), chiamata pure « *mantissa di x* » ed indicata anche con i simboli $M(x)$, $\beta(x)$, $\rho(x)$. Poichè $\operatorname{Fr} x$ ha il valore x fra 0 e 1, si scorge che nella (1) c indica il valore del periodo, $c \operatorname{Fr} \frac{x}{c}$ variando periodicamente da zero a c .

Quindi se la funzione data è la serie geometrica ⁽¹⁾

$$(2) \quad 1/(1-x) = \int_0^{+\infty} x^{I\nu} d\nu = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$$

che è convergente nell'intervallo (0, 1) rappresentando in esso la funzione $1/(1-x)$, essa si rende periodica, con questo intervallo come periodo, scrivendo

$$(3) \quad (1 - \operatorname{Fr} x)^{-1} = \int_0^{+\infty} (\operatorname{Fr} x)^{I\nu} d\nu = 1 + \operatorname{Fr} x + (\operatorname{Fr} x)^2 + \dots$$

e si ha così una funzione definita per qualsiasi valore di x da $-\infty$ a $+\infty$ e che coincide con la (2) per $0 < x < 1$, e $0 < \nu$.

2. Se nell'intervallo preso come periodo, per es. $(-c, +c)$ cade l'origine, ed esso comprende perciò anche valori negativi della variabile, allora, poichè $\operatorname{Fr} x$ è una quantità essenzialmente positiva, qualunque sia x fra $-\infty$ e $+\infty$, invece di $2c \operatorname{Fr} \frac{x}{2c}$ bisognerebbe porre $-c + 2c \operatorname{Fr} \frac{x+c}{2c}$ al posto di x .

Così per la serie geometrica

$$(4) \quad 1/(1-x^2) = \int_0^{+\infty} x^{2I\nu} d\nu = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + \dots$$

⁽¹⁾ Ho già mostrato in una Nota (« R. C. Acc. Naz. dei Lincei », maggio 1925) che ogni serie può esser rappresentata in forma finita da una funzione (dell'indice) scalariforme il cui integrale da 0 a $+\infty$ dà la somma della serie. Scrivo accanto ad ogni serie la corrispondente funzione che la rappresenta, per ν variabile da 0 a $+\infty$.

che è convergente per $|x| < 1$, volendo prendere come periodo l'intero intervallo di convergenza da -1 a $+1$, bisognerebbe invece di x porre $-1 + 2 \operatorname{Fr} \frac{x+1}{2}$. La scrittura però si semplifica riflettendo che $-\frac{1}{2} + \operatorname{Fr} \left(x + \frac{1}{2}\right)$ non è altro che la funzione (x) di RIEMANN, la quale ha appunto il valore x nel primo periodo da $-\frac{1}{2}$ a $+\frac{1}{2}$, denominata « *eccesso di x* » e rappresentata anche con $R(x)$ ⁽¹⁾. Si scorge perciò che, essendo $-1 + 2 \operatorname{Fr} \frac{x+1}{2} = 2R\left(\frac{x}{2}\right)$, per rendere la (4) periodica nel modo indicato, basta scrivere

$$(5) \quad \left\{ 1 - 2^2 \left[R\left(\frac{x}{2}\right) \right]^2 \right\}^{-1} = \int_0^{+\infty} \left\{ 2R\left(\frac{x}{2}\right) \right\}^{2I\nu} d\nu = 1 + \left\{ 2R\left(\frac{x}{2}\right) \right\}^2 + \left\{ 2R\left(\frac{x}{2}\right) \right\}^4 + \dots$$

3. Si può ottenere che nella funzione trasformata i valori della funzione si succedano in ordine inverso di quello che hanno nell'intervallo della funzione originale corrispondente al periodo. Basta perciò nel caso, dell'intervallo $(0, c)$ comprendente solo valori positivi della variabile, porre $c \operatorname{Cm} \frac{x}{c}$ invece di x nella funzione data e nel caso dell'intervallo $(-c, +c)$ comprendente l'origine porre $-2cR\left(\frac{2c}{x}\right)$, scrivendo quindi

$$(6) \quad y = f\left(c \operatorname{Cm} \frac{x}{c}\right)$$

$$(7) \quad y = f\left(-2cR\left(\frac{x}{2c}\right)\right).$$

Qui con il simbolo $\operatorname{Cm} x$ è indicata la funzione « *complemento di x* » cioè la frazione che bisogna aggiungere ad x per formare l'intero immediatamente superiore ($x + \operatorname{Cm} x = Ix + 1$).

Poichè $\operatorname{Cm} x$ ha il valore $1 - x$ fra 0 e 1 , si scorge nella (6) c indica il valore del periodo, $c \operatorname{Cm} \frac{x}{c}$ variando periodicamente da c a zero.

Riprendendo perciò l'esempio della (2) sarà

$$(8) \quad (1 - \operatorname{Cm} x)^{-1} = \int_0^{+\infty} (\operatorname{Cm} x)^{I\nu} d\nu = 1 + \operatorname{Cm} x + (\operatorname{Cm} x)^2 + \dots$$

⁽¹⁾ J. THOMAE, *Vorlesungen über bestimmte Integrale und die Fourier-schen Reihen*. G. B. Teubner, Leipzig, 1908, p. 20, § 33.

una funzione che rappresenta l'identica successione di archi della (3) ma però rivolti dalla parte opposta.

Nel caso della (4) la sostituzione di $-2R\left(\frac{x}{2}\right)$ ad x non porterebbe ad un risultato diverso dalla (5) e ciò perchè si tratta di una funzione pari e l'arco corrispondente all'intervallo fondamentale è già simmetrico rispetto all'asse delle y . Se però questa simmetria manca, come ad esempio è il caso per la funzione

$$(9) \quad e^x = \int_0^{+\infty} x^{I_\nu} I_\nu!^{-1} d\nu = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

allora le due sostituzioni $2R\left(\frac{x}{2}\right)$ e $-2R\left(\frac{x}{2}\right)$ danno risultati diversi e si ha cioè rispettivamente

$$(10) \quad e^{2R\left(\frac{x}{2}\right)} = \int_0^{+\infty} \left\{ 2R\left(\frac{x}{2}\right) \right\}^{I_\nu} I_\nu!^{-1} d\nu = 1 + \frac{2R\left(\frac{x}{2}\right)}{1!} + \frac{2^2 \left(R\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{2!} + \dots$$

$$(11) \quad e^{-2R\left(\frac{x}{2}\right)} = \int_0^{+\infty} \left\{ 2R\left(\frac{x}{2}\right) \right\}^{I_\nu} I_\nu!^{-1} i^{2I_\nu} d\nu = 1 - \frac{2R\left(\frac{x}{2}\right)}{1!} + \frac{2^2 \left(R\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2}{2!} - \dots$$

la seconda delle quali, come si scorge, deriva dalla prima applicando a questa un *fattore alternante* i^{2I_ν} il quale la lascia invariata nei periodi di ordine dispari e ne cambia il segno nei periodi di ordine pari ⁽¹⁾.

4. La stessa simmetria delle due semionde posseduta dalla (4) si può ottenere anche nel caso di una funzione dispari ponendo per x , invece della $R(x)$, la funzione che si ottiene moltiplicando questa per un fattore alternante che ne cambi il segno nei periodi di ordine pari. La funzione che ne risulta è quella che in un mio scritto ⁽²⁾ ho proposto di chiamare *poligonoide* indicandola con $\text{Plg}(x)$

⁽¹⁾ Per le diverse forme ed applicazioni del fattore alternante v. il mio scritto: *Metodo per la rappresentazione analitica sotto forma finita delle funzioni periodiche poligonali comunque irregolari*, « Elettrotecnica », 1924, n.º 19-20-21.

⁽²⁾ Sulla esprimibilità mediante equazioni di taluni vincoli finora rappresentati in meccanica con disuguaglianze o limitazioni, « Politecnico », n.º 11-12, 1923, v. § 12 dove sono date varie altre espressioni di $\text{Plg}(x)$.

e si ha quindi la notevole relazione:

$$(12) \quad \text{Plg } x = 2R\left(\frac{x}{2}\right) i^{2I} \frac{1+x}{2}.$$

Per conseguenza nella serie, convergente per $+1 > x > -1$,

$$(13) \quad \text{arc tg } x = \int_0^{+\infty} \frac{x^{1+2I\nu}}{1+2I\nu} i^{2I\nu} d\nu = x - \frac{x^3}{3} + \frac{5^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

ponendo $\text{Plg } x$ invece di x si ha

$$(14) \quad \text{arc tg Plg } x = \int_0^{+\infty} \frac{(\text{Plg } x)^{1+2I\nu}}{1+2I\nu} i^{2I\nu} d\nu = \text{Plg } x - \frac{(\text{Plg } x)^3}{3} + \frac{(\text{Plg } x)^5}{5} - \dots$$

ogni periodo della quale comprende due semi onde simmetriche rispetto alla parallela all'asse delle y condotta per l'estremo comune.

5. Se l'intervallo $(0, c)$ che si vuol simmetrificare assumendolo come semi periodo trovasi tutto da una stessa parte, quella positiva, dell'origine, bisogna per x porre una funzione che coincide con $c \text{Fr } \frac{x}{c}$ nella prima metà di ogni periodo e con $c \text{Cm } \frac{x}{c}$ nella seconda metà. Questa funzione non è altro che la poligonoide « raddrizzata » ed, indicandola brevemente con Plg_R è chiaro che si ha

$$(15) \quad \text{Plg}_R x = |\text{Plg } x| = 2R\left(\frac{x}{2}\right) i^{2Ix}.$$

Perciò si rende periodica e contemporaneamente si simmettifica la serie geometrica (2) scrivendo

$$(16) \quad (1 - \text{Plg}_R x)^{-1} = \int_0^{+\infty} (\text{Plg}_R x)^{I\nu} d\nu = 1 + \text{Plg}_R x + (\text{Plg}_R x)^2 + \dots$$

6. Un altro metodo infine per avere una funzione periodica con onde simmetriche partendo da un intervallo nel quale la funzione originale non è simmetrica, consiste nel sostituire ad x , nel caso dell'intervallo $(0, c)$ tutto da una parte dell'origine, prima $\text{Fr } x$ e poi $\text{Cm } x$ e nel caso dell'intervallo comprendente l'origine $(-c, +c)$ nel sostituire invece prima $R(x)$ e poi $-R(x)$

facendo quindi la somma o la differenza delle due funzioni così ottenute.

Operando, ad esempio, sulla funzione esponenziale (9) le sostituzioni $2R\left(\frac{x}{2}\right)$ e $-2R\left(\frac{x}{2}\right)$ si hanno prima le due funzioni (10) e (11) e poi prendendo la semisomma

$$(17) \quad \frac{1}{2} \left\{ e^{2R\left(\frac{x}{2}\right)} + e^{-2R\left(\frac{x}{2}\right)} \right\} = \text{Ch } 2R\left(\frac{x}{2}\right).$$

Si è così reso periodico il coseno iperbolico con l'intervallo $-1, +1$ come periodo. In modo analogo, sempre partendo dalla funzione esponenziale, si possono rendere periodiche anche le altre funzioni circolari ed iperboliche assegnandone ad arbitrio il periodo. In particolare se si assume come nuovo periodo la lunghezza della semi onda di una funzione che è già di per sè periodica, sostituendo $\text{Fr } x$ ad x si ottiene come risultato la funzione stessa raddrizzata. Così per esempio

$$(18) \quad y_{\pi} = \text{sen } \pi \text{ Fr } \frac{x}{\pi} = \frac{1}{2i} \left\{ e^{i\pi \text{Fr } \frac{x}{\pi}} - e^{-i\pi \text{Fr } \frac{x}{\pi}} \right\}$$

rappresenta la senoide raddrizzata.

7. Riassumendo le cose dette innanzi si può dire che data una funzione rappresentata da una serie di TAYLOR, nella forma di MAC LAURIN

$$(19) \quad f(x) = f(0) + \frac{x}{1!} f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots$$

convergente in un certo intervallo $(0, c)$ o $(-c, +c)$ essa può esser resa periodica con un periodo arbitrariamente assegnato, purchè non superiore all'intervallo di convergenza, operando in uno qualsiasi dei modi indicati innanzi; e così se è $(0, 1)$ l'intervallo di convergenza e questo intervallo si vuole assumere come periodo, la funzione

$$(20) \quad f(\text{Fr } x) = f(0) + \frac{\text{Fr } x}{1!} f'(0) + \frac{(\text{Fr } x)^2}{2!} f''(0) + \dots$$

sarà una funzione periodica sussistente per $-\infty < x < +\infty$ e che nell'intervallo $(0, 1)$ coincide identicamente con la (20) dando luogo a quella « *espèce singulière d'osculation finie* » la necessità della cui ammissione nell'analisi applicata a questioni fisiche era stata segnalata già da FOURIER ⁽¹⁾.

(1) *Théorie Analytique de la chaleur*, § 230.

8. È chiaro poi che tutto quanto è stato detto per le funzioni rappresentate da serie si applica pure alle funzioni rappresentate da prodotti infiniti

$$y = \prod_{n=1}^{n=\infty} (1 + f_n(x))$$

cosicchè, per esempio, essendo per la funzione gamma

$$(21) \quad \Gamma(1+x) = e^{\int_0^{+\infty} \log \psi(x, y) dy} = \prod_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^x}{1 + \frac{x}{n}}$$

con

$$\psi(x, y) = \left(1 + \frac{1}{y}\right)^x \left(1 + \frac{x}{y}\right)^{-1},$$

sostituendo in essa $\text{Fr } x$ ad x

$$(22) \quad \Gamma(1 + \text{Fr } x) = e^{\int_0^{+\infty} \log \psi(\text{Fr } x, y) dy} = \prod_{n=1}^{n=+\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\text{Fr } x}}{1 + \frac{\text{Fr } x}{n}}$$

si ha una funzione periodica, univoca, finita e continua da $-\infty$ a $+\infty$ che in ognuno dei suoi periodi assume i valori che la funzione $\Gamma(1+x)$ assume nell'intervallo $0 \leq x \leq 1$.

Roma. 1 novembre 1928.