Bollettino Unione Matematica Italiana

Francesco Giacomo Tricomi

Sul numero delle partizioni di un intero dato

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (1928), n.5, p. 243–245.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_5_243_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1928.

Sul numero delle partizioni di un intero dato.

Nota di FRANCESCO TRICOMI (a Torino).

Dalle formule risolutive di un problema di calcolo delle probabilità di cui mi sono recentemente occupato [1], si può agevolmente dedurre un inatteso corollario relativo alle partizioni di un numero intero che, data l'importanza dell'argomento, mi sembra meritevole di esser fatto conoscere, benchè il ragionamento con cui vi si perviene lasci molto a desiderare dal punto di vista del rigore. Si tratta precisamente della determinazione di un valore asintotico del numero $P_{n,N}(S)$ delle partizioni di un intero S in n addendi (interi e positivi), tutti distinti fra di loro e non superiori

[1] *Una quistione di probabilità.* (Atti 1° Congresso Naz. di Scienza delle Assicurazioni, Torino 1928).

ad un certo N, allorchè S ed N sono grandissimi; valore asintotico che, se non m'inganno, non è stato ancora osservato, nè è deducibile, almeno facilmente, dalle formule date da HARDY e dalla sua Scuola nelle loro classiche ricerche in materia.

Partiamo dall'osservazione che, se da un'urna contenente i numeri naturali da 1 a N, estraiamo a caso n numeri: $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e indichiamo con S la loro somma, i casi possibili per S (riguardando come distinti anche quelli in cui S, pur avendo uno stesso valore numerico, proviene da somme $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$ che non differiscano soltanto per l'ordine dei termini) sono ovviamente $\binom{N}{n}$, mentre invece quelli favorevoli ad un determinato valore S_0 di S sono $P_{n,N}(S_0)$; dunque la probabilità che la somma S abbia un certo valore S_0 è

$$\frac{P_{n,N}(S_0)}{\binom{N}{n}}.$$

D'altra parte, nel mio lavoro precitato, ho dimostrato che, posto

$$Y = \frac{2(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)}{n},$$

dove $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sono n variabili indipendenti, suscettibili di assumere, con pari probabilità, tutti i valori compresi fra O ed N; la probabilità che Y sia compreso fra un certo Y_0 e $Y_0 + dY_0$ è espressa da $Q_n(Y_0)dY_0$, essendo

$$Q_n(Y) = \frac{n}{2N} \frac{1}{(n-1)!} \mathfrak{B}_s^{n-1}(\theta)$$

dove s denota il massimo intero contenuto in $nY/2N$, θ la differenza

$$\frac{nY}{2N} - s,$$

e $\mathfrak{B}$ è il simbolo di una funzione (polinomio) studiata nella teoria dei numeri di BERNOUILLI [1], che ha la definizione seguente:

$$\mathfrak{B}_p^m(\alpha) = \sum_{r=0}^{p} (-1)^r \binom{m+1}{r} (\alpha + p - r)^m.$$

[1] Cfr. N. NIELSEN, *Traité élémentaire des nombres de Bernouilli.* Paris, Gauthiers-Villars, 1923) pag. 27 e seg.

La relazione fra le due precedenti quistioni di probabilità è di per sè evidente: in sostanza la seconda non è che la prima trasportata nel continuo. Pertanto, ammesso che le due leggi di probabilità tendano a coincidere allorchè S ed N divengono grandissimi rispetto ad n e tenuto conto che, allorchè S si accresce di un' unità, Y (che è uguale a $2S/n$) subisce l' incremento $2/n$; siamo indotti a uguagliare (asintoticamente) le due quantità

$$\frac{P_{n,N}(S)}{\binom{N}{n}} \quad \text{e} \quad \frac{n}{2N}\frac{1}{(n-1)!}\mathfrak{B}_s^{n-1}(\theta)\frac{2}{n}$$

dove

$$s=\left[\frac{S}{N}\right], \quad \theta=\frac{S}{N}-s,$$

dal che segue la formula

$$P_{n,N}(S) \backsim \frac{1}{N}\frac{1}{(n-1)!}\binom{N}{n}\mathfrak{B}_s^{n-1}(\theta).$$

Questo risultato, così semplice ed interessante, mi sembra meriterebbe di esser ritrovato per via più diretta e rigorosa, cercando nel tempo stesso di determinare l' *ordine* del residuo, dal punto di vista di LANDAU.

Torino, settembre 1928.