Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Dario Graffi

Su un metodo di calcolo delle proprietà di corpi prossimi alla sfera o al cilindro

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **7** (1928), n.5, p. 245–247.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1928_1_7_5_245_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1928.

Su un metodo di calcolo delle proprietà di corpi prossimi alla sfera o al cilindro.

Nota di D. GRAFFI (a Bologna).

1. Sia $f(Q)=0$ l'equazione di una superficie chiusa (σ) luogo dei punti Q, e φ una grandezza dipendente da (σ). Per esempio φ può essere la capacità di un conduttore isolato di superficie (σ). Consideriamo una superficie (σ') ottenuta dalla (σ) portando sulla normale esterna a (σ) una quantità infinitesima $\varepsilon(Q)$ e supponiamo che la $\delta\varphi$ differenza fra i valori della φ su (σ') e quelli della φ su (σ) sia data, a meno di infinitesimi d'ordine superiore, da:

$$\delta\varphi=\int_\sigma \psi(Q)\varepsilon(Q)d\sigma \tag{1}$$

$\psi(Q)$ è una grandezza dipendente da φ, σ, e Q che si potrebbe definire come la derivata funzionale di φ rispetto a Q.

Analogamente a quanto avviene nell'ordinario calcolo infinitesimale la (1) può dare approssimativamente il valore di $\delta\varphi$ quando i valori di ε siano finiti purchè sufficientemeute piccoli, benchè non sia possibile calcolare, almeno senza ulteriori considerazioni. l'errore commesso.

L'applicazione della formula (1) non può farsi in generale poichè non si conosce $\psi(Q)$. Ma nel caso che σ sia una sfera (o un cilindro circolare retto) si può talvolta ammettere per ragioni di simmetria che $\psi(Q)$ non dipenda da Q dimodochè nella (1) la $\psi(Q)$ si possa portare fnori dal segno d'integrazione. Perciò se si suppone che r sia il raggio della sfera e $\varepsilon(Q)$ sia uguale a dr si ha subito:

$$\delta\varphi = d\varphi(r) = \psi(Q)dr\int_\sigma d\sigma$$

$$\psi(Q) = \frac{1}{4\pi r^2}\frac{d\varphi}{dr}. \tag{2}$$

Per il cilindro circolare retto indefinito si può avere in modo analogo:

$$\psi(Q) = \frac{1}{2\pi r}\frac{d\varphi}{dr}. \tag{3}$$

Dunque in questi casi particolari è nota la $\psi(Q)$ se si conosce $\varphi(r)$ e quindi applicando la (1) si possono dedurre le proprietà di corpi infinitamente vicini alla sfera o al cilindro.

Prima di passare a qualche applicazione riteniamo opportuno osservare che il valore di $\psi(Q)$ può essere noto anche nel caso di due sfere o di due cilindri circolari concentrici. Riferendoci per esempio al caso delle sfere la (1) si spezzerebbe in due integrali estesi alle singole sfere e la $\psi(Q)$ diversa nei due integrali si calcolerebbe però sempre con la (2) ponendo al posto di r il raggio della sfera su cui si considera $\psi(Q)$.

2. Per potere applicare questi risultati occorre vedere se per la φ vale la formula (1). Nel caso di coefficienti di capacità (o di problemi simili) la validità della formula (1) è stata dimostrata [1] dal LEVY. Noi ci limiteremo a questo argomento. ma evidentemente il metodo vale anche in altre occasioni.

(1) P. LEVY, *Sur la variation de la distribution de l'electricité sur un conducteur lorsque la surface se déforme.* « Bulletin de la Société Mathematique de France », XLVI. 1918.

Come primo esempio calcoliamo la capacità c di un conduttore prossimo alla sfera di raggio r. Si ha:

$$\varphi(r) = c(r) = r, \quad \frac{dc}{dr} = 1, \quad \psi(Q) = \frac{1}{4\pi r^2}, \quad \delta c = \frac{1}{4\pi r^2}\int_\sigma \varepsilon(Q)d\sigma.$$

Questo risultato è dovuto al CISOTTI (¹) che lo trovò col calcolo diretto.

Come altro esempio di applicazione cerchiamo la capacità di un condensatore prossimo a quello sferico. Se r_1 e r_2 ($r_1 > r_2$) sono i raggi delle sfere, si ha:

$$c(r_1, r_2) = \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2}$$

quindi

$$\frac{\partial c}{\partial r_1} = \frac{r_2}{r_1 - r_2} - \frac{r_1 r_2}{(r_1 - r_2)^2} = -\frac{r_2^2}{(r_1 - r_2)^2}$$

$$\frac{\partial c}{\partial r_2} = \frac{r_1}{r_1 - r_2} + \frac{r_1 r_2}{(r_1 - r_2)^2} = \frac{r_1^2}{(r_1 - r_2)^2}$$

$$\delta c = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{r_1^2}{r_2^2(r_1 - r_2)^2}\int_{\sigma_2} \varepsilon d\sigma_2 - \frac{r_2^2}{r_1^2(r_1 - r_2)^2}\int_{\sigma_1} \varepsilon d\sigma_1\right)$$

dove σ_1 e σ_2 sono rispettivamente le sfere di raggio r_1 e r_2.

Infine calcoliamo la variazione δR della resistenza termica o elettrica (²) per unità di lunghezza di un corpo di conducibilità c di forma prossima allo spazio compreso fra due cilindri coassiali concentrici di raggio r_1 e r_2 ($r_1 > r_2$). Si ha:

$$R = \frac{\log \frac{r_1}{r_2}}{2\pi c}$$

$$\frac{\partial R}{\partial r_1} = \frac{1}{2\pi c}\frac{1}{r_1}\log r_2, \quad \frac{\partial R}{\partial r_2} = -\frac{1}{2\pi c}\frac{1}{r_2}\log r_1$$

$$\delta R = \frac{1}{4\pi c^2}\left(\frac{\log r_2}{r_1^2}\int_{\rho_1} \varepsilon d\rho_1 - \frac{\log r_1}{r_2^2}\int_{\rho_2} \varepsilon d\rho_2\right)$$

dove ρ_1 ed ρ_2 sono le circonferenze di raggio r_1 e r_2.

(¹) « Rendiconto Istituto Lombardo ». 1916.

(²) Si ricordi che in questo caso la resistenza è, a meno di costanti l'inversa della capacità, grandezza non nulla.