GIUSEPPE VITALI

# Sul raggio di convergenza di certe serie di Taylor

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1*, Vol. **8** (1929), n.1, p. 10–16.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_1_10_0>

# Sul raggio di convergenza di certe serie di Taylor.

Nota di GIUSEPPE VITALI (a Padova).

**Sunto.** - *In questa Nota l'A. trova delle condizioni per una trascendente di genere* zero g(z), *sufficienti per concludere che la serie* $\sum_1^\infty n\, g(n) \cdot z^n$ *ha il suo raggio di convergenza eguale a* 1.

**1.** Sia

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots.$$

una serie assolutamente convergente a termini costanti complessi.

Indichiamo con $\alpha_n$ e con $\pi \pm \theta_n$ il modulo e l'argomento di $a_n$. Si può sempre supporre che sia $0 \leq \theta_n \leq \pi$.

Per l'ipotesi fatta la serie

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots.$$

è convergente, e noi indicheremo con $\sigma$ la sua somma, con $\sigma_n$ la somma dei suoi primi $n$ termini e con $\rho_n$ il resto corrispondente, cosicchè sia $\sigma = \sigma_n + \rho_n$.

Si avrà allora

$$\lim_{n=\infty} \rho_n = 0. \tag{1}$$

Il prodotto infinito

$$\prod_1^\infty {}_r(1 + a_r z)$$

è per ogni valore complesso di $z$ assolutamente convergente, e, per tutti i valori di $z$ che hanno modulo non superiore ad un numero finito fisso reale $e > 0$, uniformemente convergente, e quindi la

$$g(z) = \prod_1^\infty {}_\nu (1 + a_\nu z)$$

è una funzione analitica regolare in tutti i punti del piano complesso situati a distanza finita.

Essa è una trascendente intera di genere *zero*. Viceversa ogni trascendente intera di genere *zero*, all'infuori di un fattore costante, può essere ottenuta in tal modo.

**2.** Se $n$ è un intero $> 0$, indico con $G_n$ la radice $n$-$^{ma}$ aritmetica del modulo di $g(n)$, e per ogni intero $n > 0$ indico con $L_n$ il limite superiore dell'aggregato

$$G_n, \; G_{n+1}, \; G_{n+2}, \ldots .$$

La successione

$$L_1, \; L_2, \; L_3, \ldots .$$

è tale per cui

$$L_1 \geq L_2 \geq L_3 \geq \ldots .$$

e quindi ammette un limite $L$ che sarà il suo limite inferiore.

Sia $m$ un numero intero $> 0$, ed indichiamo con $P_m(n)$, per ogni intero $n > 0$, la radice $n$-esima aritmetica del modulo di

$$(1 + a_1 n)(1 + a_2 n)(1 + a_3 n) \ldots (1 + a_m n),$$

e con $Q_m$ la radice $n$-esima aritmetica del modulo di

$$\prod_{m+1}^\infty {}_\nu (1 + a_\nu n).$$

Essendo

$$| 1 + a_\nu n | \leq 1 + \alpha_\nu n \leq e^{\alpha_\nu n}$$

si ha subito

$$Q_m(n) \leq e^{\beta_m}.$$

Inoltre, essendo, come è noto,

$$\lim_{n=\infty} (1 + \alpha_\nu n)^{\frac{1}{n}} = 1,$$

sarà

$$\lim_{n=\infty} P_m(n) = 1,$$

e quindi esisterà un $n_0$ tale che per ogni $n \geq n_0$ si abbia

$$P_m(n) \leq \frac{m + 1}{m}.$$

Ma

$$G_n = P_m(n) Q_m(n),$$

dunque per $n \geq n_0$ è

$$G_n \leq \frac{m+1}{m} e^{\rho_m}.$$

Per tali $n$ è

$$L_n \leq \frac{m+1}{m} e^{\rho_m},$$

e quindi è

$$L \leq \frac{m+1}{m} e^{\rho_m}.$$

Questo per qualunque $m$, e poichè, per la (1),

$$\lim_{m=\infty} \frac{m+1}{m} e^{\rho_m} = 1,$$

$$L \leq 1.$$

**3.** Consideriamo i $\theta_n$ che sono $< \frac{\pi}{2}$, e supponiamo che siano quelli che corrispondono ai valori

(2) $$n_1, \; n_2, \; n_3, \ldots$$

dell'indice $n$.

Noi diremo che la $g(z)$ soddisfa alla *condizione A* se gli indici (2) sono in numero finito, oppure se il prodotto infinito

(3) $$\operatorname{sen} \theta_{n_1} \cdot \operatorname{sen} \theta_{n_2} \cdot \operatorname{sen} \theta_{n_3} \ldots$$

è assolutamente convergente [1].

[1] Si verifica facilmente che questa condizione è soddisfatta se converge la serie

$$\sum_1^\infty \left( \frac{\pi}{2} - \theta_{n_r} \right).$$

Infatti, essendo

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \theta_{n_r} \right) < \frac{\pi}{2} - \theta_{n_r},$$

e quindi

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \theta_{n_r} \right) < \frac{\pi}{2} - \theta_{n_r},$$

la serie

$$\sum_1^\infty {}_r\, 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \left( \frac{\pi}{2} - \theta_{n_r} \right) = \sum_1^\infty {}_r \left[ 1 - \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta_{n_r} \right) \right] = \sum_1^\infty {}_r (1 - \operatorname{sen} \theta_{n_r})$$

è convergente, e quindi il prodotto [3] è assolutamente convergente.

Supposto che la $g(z)$ soddisfi alla condizione $A$, i fattori $1 + \alpha_r n$ che corrispondono a valori di $r$ diversi dai valori (2) sono in modulo $\geq 1$, qualunque sia $n$, ed i rimanenti fattori sono tali che qualunque sia $n$ si ha

$$|1 + \alpha_{n_r} n| \geq \operatorname{sen} \theta_{n_r}.$$

Consegue che per ogni intero $n > 0$ è

$$G_n \geq b^{\frac{1}{n}},$$

dove $b$ è il valore del prodotto (3).

Ma

$$\lim_{n=\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1,$$

dunque è $L \geq 1$.

Combinando questo risultato con quello trovato alla fine del n.° 2, si conclude che

$$L = 1.$$

Ora il raggio di convergenza della serie

$$\sum_{1}^{\infty}{}_n g(n) z^n \tag{4}$$

è l'inverso di $L$, e quindi si può concludere col teorema:

Se $g(z)$ è una trascendente intera di genere *zero* che soddisfa alla condizione $A$, la serie (4) ha raggio di convergenza 1.

**4.** Imaginiamo, il che si può sempre supporre, che sia

$$\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \alpha_3 \geq \dots.$$

Noi diremo che la $g(z)$ soddisfa alla *condizione B*, se esiste un numero reale $\varepsilon > 0$, corrispondentemente al quale esista una successione crescente di numeri interi

$$r_1 < r_2 < r_3 < \dots \tag{$\omega$}$$

tali che per ogni $i$ esista un intero $n_i$ per cui

$$n_i \cdot \alpha_{r_i} - 1 > 1 - n_i \cdot \alpha_{r_i+1} > \varepsilon.$$

È evidente che se sussiste la condizione $B$ si dovrà avere

$$n_i > \frac{1 + \varepsilon}{\alpha_{r_i}},$$

e che quindi percorrendo la successione degli $n_i$ si troveranno degli interi grandi quanto si vuole.

**5.** Supposto che esista la condizione $B$, per ogni $r \geq r_i + 1$ si avrà

$$1 - n_i \alpha_r > \varepsilon,$$

ed inoltre

$$|1 - n_i a_r| > 1 - n_i \alpha_r = \frac{1}{1 + \dfrac{n_i \alpha_r}{1 - n_i \alpha_r}} >$$

$$> \frac{1}{1 + k n_i \alpha_r} \geq \frac{1}{e^{k n_i \alpha_r}} = e^{-k n_i \alpha_r}$$

dove $k = 1 : \varepsilon$.

Per ogni $r \leq r_i$, si ha poi

$$|1 - n_i a_r| \geq n_i \alpha_r - 1 \geq n_i \alpha_{r_i} - 1 > 1 - n_i \cdot \alpha_{r_i+1} \geq e^{-k n_i \alpha_{r_i+1}} \geq$$

$$\geq e^{-k n_i \alpha_r}.$$

In conclusione per ogni $i$ e per qualunque $r$ si ha

$$|1 - n_i a_r| \geq e^{-k n_i \alpha_r}.$$

Ciò premesso, e ripigliando le notazioni introdotte al n.° 2, si ha

$$Q_m(n_i) \geq e^{-k \rho_m}$$

e

$$\lim_{i=\infty} P_m(n_i) = 1.$$

e quindi per $i$ abbastanza grande

$$P_m(n_i) > \frac{m-1}{m}.$$

cosicchè per $i$ abbastanza grande

$$G_{n_i} > \frac{m-1}{m} \cdot e^{-k \rho_m},$$

da cui consegue che

$$L \geq \frac{m-1}{m} \cdot e^{-k \rho_m}.$$

Ma $m$ può essere preso qualunque, e col tendere di $m$ all'$\infty$, il secondo membro della precedente disuguaglianza tende ad 1. quindi

$$L \geq 1.$$

Ma sappiamo che, anche senza la condizione $B$. è

$$L \leq 1.$$

dunque è $L = 1$. e si può concludere col teorema:

Se $g(z)$ è una trascendente intera di genere *zero*, che soddisfa alla condizione $B$, la serie (4) ha raggio di convergenza 1.

**6.** La condizione $B$ contiene la condizione apparentemente meno restrittiva

$$\frac{1-\varepsilon}{\alpha_{r_i+1}} > n_i > \frac{1+\varepsilon}{\alpha_{r_i}},$$

condizione che contiene la disuguaglianza

$$\frac{1}{\alpha_{r_i+1}} > (1+\eta)\frac{1}{\alpha_{r_i}}, \tag{5}$$

dove $\eta = \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon}$, e può essere piccolo quanto si vuole, purchè $\varepsilon$ sia sufficientemente piccolo.

La (5) sarebbe la condizione che io avrei suggerito al Minetti per segnargli una via facile nelle sue ricerche [1], ma la redazione della nota sua alla quale mi riferisco, e che fu pubblicata nel 1926, non è stata vista da me che in questi ultimi giorni, malgrado che in essa si parli di un *accurato esame* da parte mia.

**7.** Diremo che la $g(z)$ soddisfa alla condizione $C$ quando esiste un numero reale $\eta > 0$ a cui corrisponda una successione $(\omega)$ per cui valgano le (5).

Io dico che se la $g(z)$ soddisfa la condizione $C$, soddisfa anche la condizione $B$.

Infatti, se si pone

$$\varepsilon = \eta : (4+\eta),$$

si ha

$$1+\eta = (1+3\varepsilon) : (1-\varepsilon),$$

e la (5) dà

$$(1-\varepsilon)\alpha_{r_i} > (1+3\varepsilon)\alpha_{r_i+1}.$$

Ma si può trovare un $i_0$ per cui per ogni $i > i_0$ sia $\alpha_{r_i} < \varepsilon$ e per tali $i$ si ha

$$(1-\varepsilon)\alpha_{r_i} > (1+\varepsilon+\alpha_{r_i}+\alpha_{r_i+1})\alpha_{r_i+1};$$

ossia

$$\alpha_{r_i}+\alpha_{r_i+1} > (2+\alpha_{r_i}+\alpha_{r_i+1})\alpha_{r_i+1}+\varepsilon(\alpha_{r_i}+\alpha_{r_i+1})$$

[1] S. Minetti, *Sul raggio di convergenza degli sviluppi tayloriani* $\Sigma a_n z^n$ *ove* $a_n = g(n)$ *per* n *intero positivo con* g(z) *trascendente intera.* [« Rend. della R. Accademia dei Lincei », 1926, serie 6, vol. II, fasc. 12, pp. 723-731].

e dividendo per $\alpha_{r_i} + \alpha_{r_i+1}$

$$1 - \left( \frac{2}{\alpha_{r_i} + \alpha_{r_i+1}} + 1 \right) \alpha_{r_i+1} > \varepsilon .$$

A maggior ragione indicando con $n_i$ la parte intera di

$$\frac{2}{\alpha_{r_i} + \alpha_{r_i+1}} + 1,$$

sarà

$$1 - n_i \alpha_{r_i+1} > \varepsilon ,$$

ed inoltre

$$n_i > \frac{2}{\alpha_{r_i} + \alpha_{r_i+1}},$$

da cui

$$n_i \alpha_{r_i} - 1 > 1 - n_i \alpha_{r_i+1} ,$$

e quindi esiste un numero reale $\varepsilon > 0$ a cui corrisponde una successione

$$r_{i_0+1}, \quad r_{i_0+2}, \quad r_{i_0+3} \ldots ,$$

tale che per ogni $r_i$ di questa successione si abbia un intero $n_i$ per cui

$$n_i \alpha_{r_i} - 1 > 1 - n_i \alpha_{r_i+1} > \varepsilon .$$

e la $g(z)$ soddisfa alla condizione $B$.

Allora il teorema del n.° 5 può essere sostituito dal seguente teorema:

Se $g(z)$ è una trascendente intera di genere *zero*, che soddisfa alla condizione $C$, la serie (4) ha raggio di convergenza 1.

**8.** Si potrebbe ritenere che la condizione $C$ non sia una condizione restrittiva, e che essa sia conseguenza della convergenza della serie

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \ldots ,$$

ma si vede che ciò non è considerando la serie convergente

$$\sum_{1}^{\infty}{}_{n} \frac{1}{n^2}$$

in cui il rapporto di un termine al seguente tende ad 1 e quindi non può esistere una infinità di questi rapporti che restino $> 1 + \eta$, con $\eta$ numero reale fisso e $> 0$.