Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Filippo Sibirani

Sviluppo di alcuni determinanti ed una identità trigonometrica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (1929), n.1, p. 23–25.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_1_23_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1929.

Sviluppo di alcuni determinanti ed una identità trigonometrica.

Nota di FILIPPO SIBIRANI (a Trieste).

Sunto. - *È dato lo sviluppo del determinante di* VANDERMONDE *formato con le successive potenze delle radici* n*-esime dell'unità e sono calcolati i complementi algebrici dei suoi elementi. È dimostrato che il prodotto di* $\mathrm{sen}^{n-k}\frac{k\pi}{n}$ *per* $k = 1, 2, \ldots$ *fino al massimo intero contenuto in* $\frac{n-1}{2}$ *vale* $\sqrt{n \cdot 2^{1-n}}$.

In un mio recente lavoro ([1]), introdotte le funzioni

$$v_s(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{x^{s+hn}}{(s+hn)!} \qquad (s = 0, 1, \ldots\, n-1),$$

sono dedotte le formule

$$e^{\varepsilon_n^r x} = \sum_{s=0}^{n-1} \varepsilon_n^{sr} v_s(x) \qquad (r = 0, 1, \ldots\, n-1) \tag{1}$$

$$v_s(x) = \frac{1}{n} \sum_{r=0}^{n-1} \varepsilon_n^{s(n-r)} e^{\varepsilon_n^r x} \qquad (s = 0, 1, \ldots\, n-1). \tag{2}$$

ove si è posto

$$\varepsilon_n = \cos\frac{2\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{n}.$$

([1]) F. SIBIRANI, *Sopra una classe di trascendenti intere.* « Atti della Pontificia Accademia delle Scienze Nuovi Lincei », 1929.

Considerando il sistema (1) come un sistema di n equazioni lineari nelle v_i, il determinante dei coefficienti è un determinante di VANDERMONDE, di cui la prima riga è formata da unità e la seconda dai numeri $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots \varepsilon^{n-1}$. Se chiamiamo con Δ questo determinante e con A_{hk} il complemento algebrico dell'elemento che sta nella riga h-esima e nella colonna k-esima, poichè le (2) sono le soluzioni del sistema (1), si trae

$$A_{hk} = \frac{1}{n} \Delta \varepsilon_n^{(k-1)(n-h+1)}.$$

Ne consegue che, trovato lo sviluppo di Δ, sono trovati gli sviluppi di altri n^2 determinanti.

Per la nota formula che dà lo sviluppo del determinante di VANDERMONDE, si ha

$$\Delta = \varepsilon_n^{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} \prod_{k=1}^{n-1} (\varepsilon_n^k - 1)^{n-k}.$$

Ora è

$$\begin{aligned} \varepsilon_n^k - 1 &= \cos\frac{2k\pi}{n} - 1 + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2k\pi}{n} = \\ &= 2\,\mathrm{sen}\,\frac{k\pi}{n}\left(-\mathrm{sen}\,\frac{k\pi}{n} + i\cos\frac{k\pi}{n}\right) = \\ &= 2\,\mathrm{sen}\,\frac{k\pi}{n}\left(\cos(2k+n)\frac{2\pi}{4n} + i\,\mathrm{sen}(2k+n)\frac{2\pi}{4n}\right) = 2\,\mathrm{sen}\,\frac{k\pi}{n}\,\varepsilon_{4n}^{2k+n} \end{aligned}$$

indicando con ε_{4n} la radice $4n$-esima dell'unità

$$\cos\frac{2\pi}{4n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{4n}.$$

Ne discende

$$\begin{aligned} \Delta &= \varepsilon_n^{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}} \prod_{k=1}^{n-1} 2^{n-k}\,\mathrm{sen}^{n-k}\frac{k\pi}{n}\,\varepsilon_{4n}^{(2k+n)(n-k)} = \\ &= \varepsilon_n^{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}\,\varepsilon_{4n}^{\frac{n(n-1)(5n+2)}{6}}\,2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{k=1}^{n-1} \mathrm{sen}^{n-k}\frac{k\pi}{n}. \end{aligned}$$

Se, come si usa, indichiamo con $E(z)$ il massimo intero contenuto in z, è

$$\prod_{k=1}^{n-1} \mathrm{sen}^{n-k}\frac{k\pi}{n} = \left[\prod_{k=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \mathrm{sen}\,\frac{k\pi}{n}\right]^n;$$

ed è poi

$$\varepsilon_n^{\frac{n(n-1)(n-2)}{6}}\,\varepsilon_{4n}^{\frac{n(n-1)(5n+2)}{6}}=\varepsilon_{4n}^{\frac{n(n-1)(3n-2)}{2}}=i^{\frac{(n-1)(3n-2)}{2}}.$$

Dopo di ciò si ha

$$(3)\qquad \Delta=i^{\frac{(n-1)(3n-2)}{2}}\,2^{\frac{n(n-1)}{2}}\left[\prod_{k=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\operatorname{sen}\frac{k\pi}{n}\right]^n.$$

Facciamo il quadrato del determinante Δ: esso è un determinante con tutti gli elementi nulli tranne il 1º della 1ª riga, l'n-esimo della 2ª riga, l'$(n-1)$-esimo della 3ª riga.... il 2º della n-esima riga e questi elementi non nulli sono eguali ad n: dunque

$$\Delta^2=(-1)^{\frac{(n-1)(n+2)}{2}}\,n^n,$$

da cui

$$\Delta=\mp(-1)^{\frac{(n-1)(n+2)}{4}}\sqrt{n^n}.$$

L'indeterminazione del segno in quest'ultima formola si toglie con il confronto con la (3); si trae

$$\Delta=i^{\frac{(n-1)(3n-2)}{2}}\sqrt{n^n}.$$

Ma contemporaneamente si deduce l'identità

$$\prod_{k=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\operatorname{sen}^{n-k}\frac{k\pi}{n}=\sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}}.$$