Bollettino
Unione Matematica
Italiana

Giuseppe Aliprandi

Normali di particolari superficie con il σ_2 a quattro dimensioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (1929), n.1, p. 25–29.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_1_25_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1929.

Normali di particolari superficie con il σ_2 a quattro dimensioni.

Nota di GIUSEPPE ALIPRANDI (a Padova).

Il prof. ANGELO TONOLO — in una Nota di cui Egli gentilmente ha voluto consentirmi la visione del manoscritto —, ricorrendo alla rappresentazione cartesiana [1], è riuscito a determinare

[1] A. TONOLO, *Determinazione di un particolare sistema di normali delle superficie dello spazio* S_4. (È in corso di stampa nelle « Memorie della R. Accademia di Torino »).

una coppia di normali a una superficie del S_4, analoga a quelle principali del VITALI [1].

Lo stesso risultato si può vedere in modo sintetico, — come si vede nella presente Nota —, ricorrendo alla rappresentazione funzionale [2], con il vantaggio di una maggiore comprensione, in quanto che le considerazioni si estendono a *tutte* le V_2 con il σ_2 a 4 dimensioni e con il σ_3 coincidente con il σ_2.

1. Sia

$$f = f(t, u_1, u_2)$$

l'equazione di una V_2 avente il σ_2 a 4 dimensioni e il σ_3 contenuto nel σ_2.

Se Z è un parametro di σ_2 normale a V_2; se Z_h, f_h indicano, qui e nel seguito, derivate rispetto a u_h, e $f_{h,k}$ il sistema derivato secondo covariante di f rispetto alla forma

$$ds^2 = \sum_1^2 a_{rs}\, du_r\, du_s, \qquad \left(a_{rs} = \int_g f_r f_s\, dt\right) \tag{1}$$

che dà il quadrato dell'elemento lineare, si ha

$$\int_g Z f_h\, dt = 0 \tag{2}$$

e quindi, derivando rispetto a u_k, poi introducendo le derivate seconde covarianti e tenendo conto della (2), si ha

$$\int_g Z_k f_h\, dt = -\int_g Z \frac{\partial f_h}{\partial u_k}\, dt = -\int_g Z f_{h,k}\, dt = -z_{h,k} \tag{3}$$

dove

$$z_{h,k} = \int_g Z f_{h,k}\, dt.$$

(1) G. VITALI, *Sopra alcuni invarianti associati ad una varietà e sopra i sistemi principali di normali delle superficie*. In « Annales de la Société polonaise de mathématique », tomo VII, anno 1928, pagg. 43-67. Cracovia. [Sarà richiamata con (A)]. — *Sistemi principali di normali ad una varietà giacenti nel suo* σ_2. In « Annales de la Société polonaise de mathématique », tomo VII, anno 1928, Cracovia. [Sarà richiamata con (B)].

(2) G. VITALI, *Geometria nello spazio hilbertiano*. Memoria. « Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti ». Anno Acc. 1927-28, tomo LXXXVII, parte seconda, pagg. 349-428.

Determiniamo ora due costanti α e β in modo che sieno soddisfatte le due equazioni

$$\int_g (Z_k + \alpha f_1 + \beta f_2) f_h \, dt = 0 \tag{4} \qquad (h = 1.\ 2)$$

ossia in modo che il parametro

$$(Z)_k = Z_k + \alpha f_1 + \beta f_2 \tag{5}$$

sia ortogonale a V_2.

Per la (3), le (4) diventano:

$$\begin{cases} \alpha a_{11} + \beta a_{21} = z_{1,k} \\ \alpha a_{12} + \beta a_{22} = z_{2,k}. \end{cases}$$

Risolvendo si ha:

$$\alpha = \frac{z_{1.k}\, a_{22} - z_{2,k}\, a_{21}}{a} \qquad \beta = \frac{z_{2,k}\, a_{11} - z_{1.k}\, a_{12}}{a}$$

dove a è il discriminante della forma (1). È quindi, dalla (5).

$$Z_k = (Z)_k - \frac{z_{1,k}\, a_{22} - z_{2,k}\, a_{21}}{a} f_1 - \frac{z_{2,k}\, a_{11} - z_{1,k}\, a_{12}}{a} f_2 . \tag{6}$$

2. Denotiamo con X e Y, due parametri normali di direzione, giacenti nel σ_2 e ortogonali a V_2. Se P è un punto della V_2, il piano ν normale in P alla V_2, ha l'equazione

$$\varphi = f + \lambda X + \mu Y$$

mentre il piano ν' normale a V_2 in punto P' sufficentemente vicino a P, è, conservando gli infinitesimi di I° ordine,

$$\varphi = f + f_1 du_1 + f_2 du_2 + \lambda[X + X_1 du_1 + X_2 du_2] + \mu[Y + Y_1 du_1 + Y_2 du_2].$$

Tenendo conto delle (6), si ha

$$\begin{aligned} \varphi = f &+ \lambda[X + (X)_1 du_1 + (X)_2 du_2] + \mu[Y + (Y)_1 du_1 + (Y)_2 du_2] + \\ &+ \left\{ du_1 - \left(\frac{x_{1.1}\, a_{22} - x_{2.1}\, a_{21}}{a} du_1 + \frac{-x_{2,2}\, a_{21} + x_{1.2}\, a_{22}}{a} du_2 \right)\lambda - (\ldots)\mu \right\} . f_1 \\ &+ \left\{ du_2 - \left(\frac{-x_{1,1}\, a_{12} + x_{2,1}\, a_{11}}{a} du_1 + \frac{-x_{1,2}\, a_{12} + x_{2,2}\, a_{11}}{a} du_2 \right)\lambda - (\ldots)\mu \right\} . f_2 \end{aligned}$$

dove, per ogni $\{\ \}$, la $(\ldots.)$ stà a indicare termini analoghi a quello scritto nella precedente $(\ )$, con la pura sostituzione delle y alle x.

Il punto $\bar{Q}$ comune ai due piani ν e ν', si trova annullando i coefficienti di f_1 ed f_2; esso è quindi definito dalle equazioni:

$$(7)\quad \begin{cases} du_1 = \lambda\left(\dfrac{x_{1,1}a_{22} - x_{2,1}a_{21}}{a} du_1 + \dfrac{-x_{2,2}a_{21} + x_{1,2}a_{22}}{a} du_2\right) + \mu(\ldots) \\ du_2 = \lambda\left(\dfrac{-x_{1,1}a_{12} + x_{2,1}a_{11}}{a} du_1 + \dfrac{-x_{1,2}a_{12} + x_{2,2}a_{11}}{a} du_2\right) + \mu(\ldots) \end{cases}$$

A questo sistema (7), sostituiamo il sistema di due combinazioni lineari delle sue equazioni, ottenute moltiplicando la prima per a_{11} e la seconda per a_{21} e sommando, e poi la prima per a_{12} e la seconda per a_{22} e sommando, cioè

$$(8)\quad \begin{cases} \lambda(x_{1,1}du_1 + x_{1,2}du_2) + \mu(y_{1,1}du_1 + y_{1,2}du_2) = a_{11}du_1 + a_{21}du_2 \\ \lambda(x_{2,1}du_1 + x_{2,2}du_2) + \mu(y_{2,1}du_1 + y_{2,2}du_2) = a_{12}du_1 + a_{22}du_2 . \end{cases}$$

Poniamo

$$\bar{x}_{1\cdot 1} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ x_{1,2} & x_{1,1} \end{vmatrix} : \sqrt{a}, \quad \bar{x}_{1,2} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{22} \\ x_{1,1} & x_{2,2} \end{vmatrix} : (2\sqrt{a}), \quad \bar{x}_{2,2} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{12} \\ x_{2\cdot 2} & x_{1,2} \end{vmatrix} : \sqrt{a}.$$

e analoghe, cambiando x con y. E infine poniamo:

$$H_{11} = \begin{vmatrix} x_{1,1} & y_{1,1} \\ x_{2,1} & y_{2,1} \end{vmatrix} ; \quad 2H_{12} = \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{2,2} \\ y_{1,1} & y_{2,2} \end{vmatrix} : \quad H_{22} = \begin{vmatrix} x_{1,2} & y_{1,2} \\ x_{2,2} & y_{2,2} \end{vmatrix} .$$

Risolvendo le (8), si ha

$$(9)\quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{\bar{x}_{1,1}du_1^2 + 2\bar{x}_{1,2}du_1du_2 + \bar{x}_{2,2}du_2^2}{H_{11}du_1^2 + 2H_{12}du_1du_2 + H_{22}du_2^2} \\ \mu = \dfrac{\bar{y}_{11}du_1^2 + 2\bar{y}_{1,2}du_1du_2 + \bar{y}_{2,2}du_2^2}{H_{11}du_1^2 + 2H_{12}du_1du_2 + H_{22}du_2^2} \end{cases}$$

E allora il punto $\bar{Q}$, è dato da

$$f + \lambda[X + (X)_1 du_1 + (X)_2 du_2] + \mu[Y + (Y)_1 du_1 + (Y) du_2]$$

dove le λ e μ sono date dalle (9).

Facendo poi tendere du_1 e du_2 a zero, il punto $\bar{Q}$ tende a un punto

$$Q = f + \lambda X + \mu Y$$

che è evidentemente quello trovato dal prof. TONOLO.

3. Se poi poniamo

$$\varphi_{r,s} = \bar{x}_{r,s}X + \bar{y}_{r,s}Y$$

si vede che le $\varphi_{r,s}$ sono i parametri che figurano nella nota (A) del prof. VITALI. Partendo da queste, la ricerca delle normali principali del TONOLO, si conduce operando sulle $\varphi_{r,s}$ come il prof. VITALI opera nella nota (B), sulle $f_{r,s}$ per cercare le normali principali.