UMI

Recensioni

* H. Lebesgue: Leçons sur l'intégration et la recerche des fonctions primitives
* B. Courant: Vorlesungen über Differential-und Integralrechnung. Band II: Funktionen mehrerer Veränderlicher.
* W. Sierpinski: Leçons sur les nombres transfinis

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (1929), n.2, p. 108–112.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_2_108_0>

RECENSIONI

H. LEBESGUE: *Leçons sur l'intégration et la recerche des fonctions primitives.* (Paris, Gauthier-Villars, 1928, pagg. XIII+341.

È ben nota a tutti i matematici l'opera pubblicata dal LEBESGUE nel 1903, in cui, dopo uno studio sullo sviluppo del concetto d'integrale, l'A. espone la generalizzazione, ormai classica, che Egli ha data dell'integrazione, generalizzazione cui è legato il suo nome. Quell'opera essendo da qualche anno esaurita, ne viene ora presentata una seconda edizione, ma talmente modificata e rifusa da potersi considerare come un'opera del tutto nuova.

Nella prima edizione, una parte considerevole del libro (i tre quarti all'incirca) era dedicata all'analisi delle ricerche anteriori sull'integrazione, e nel settimo Capitolo soltanto l'A. esponeva le sue vedute proprie e la nuova definizione. Nella presente, invece, sono conservati in gran parte i primi sei Capitoli; ma l'antico Cap. VII è sostituito dai tre poderosi Capitoli VII, VIII e IX, e le 40 pagine che nella prima edizione seguivano i primi sei Capitoli sono, in questa, sostituiti da ben 237 pagine.

Definito (descrittivamente) l'integrale dalle sei sue proprietà formali (delle quali, dopo la comparsa della prima edizione, il BANACH aveva dimostrata l'indipendenza) viene definito (sempre a mezzo delle sue proprietà fondamentali) il concetto di misura: quindi quello di funzione misurabile, e con ciò è possibile di passare alla definizione *costruttiva* d'integrale e di mostrare che per le funzioni limitate, vengono soddisfatte le proprietà contenute nella definizione *descrittiva.* Sotto una opportuna condizione, la costruzione dell'integrale vale anche per funzioni non limitate: si hanno così, da codesta condizione, le funzioni ora dette dall'A. *sommabili.* Segue l'estensione dell'integrazione alle funzioni, non più di un intervallo, ma di un insieme di punti; indi teoremi sull'interessante argomento, di cui si è occupato con successo il nostro VITALI, dell'integrazione per serie. Il Cap. VII si chiude con un confronto fra la definizione d'integrale secondo l'A. e quella proposta da

W. H. Young. Nel Cap. VIII viene considerato l'integrale indefinito: esso è, per l'A. una funzione d'insieme, o una funzione dell'intervallo d'integrazione, o una funzione $F(x)$ di variabile; ne sono poste in evidenza le proprietà caratteristiche, dando il maggior rilievo alla proprietà addittiva $F(A+B+C....) = F(A) + F(B) + F(C) ....$, A, B, C,...., essendo degli aggregati o degli intervalli. Viene poi notata la proprietà dell'assoluta continuità (a proposito della quale ci conviene pure ricordare il Vitali) come proprietà essenziale dell'integrale indefinito. Segue lo studio del distacco, di una funzione limitata, dal carattere della assoluta continuità, e a questo oggetto sono introdotti gli « insiemi delle singolarità » di una tale funzione, e le « funzioni delle singolarità ».

Nel Capitolo IX, l'A., sfruttando le proprietà delle derivate date nella prima parte dell'opera, passa al problema della ricerca delle funzioni primitive; egli giunge a varii risultati, in parte già dati, in parte nuovi: è di speciale importanza pratica quello che stabilisce che una funzione assolutamente continua è l'integrale definito di uno qualunque dei suoi quattro numeri derivati. Studia quindi la questione della derivazione per le funzioni a variazione limitata, giungendo a ritrovare l'importante enunciato: « Condizione necessaria e sufficiente perchè $F(x)$ sia una funzione integrale, è che essa sia assolutamente continua ». Il Cap. X è dedicato a quella estensione della integrazione dovuta al Denjoy, da questo Autore detta *totalizzazione*, e che consiste in una successione finita o trasfinita di operazioni di determinazione di primitiva in successivi intervalli; esso permette in ogni caso di determinare la primitiva di una funzione derivata data, in tutto l'intervallo in cui questa è nota; l'A., insieme a risultati suoi, espone, in forma alquanto modificata, quelli del Denjoy. L'ultimo capitolo è dedicato alla teoria dell'integrale di Stieltjes, di cui l'ordinaria integrazione è un caso particolare; ed il risultato di F. Riesz, che esprime ogni funzionale, definito per funzioni continue, sotto forma di integrale di Stieltjes, permette all'A. l'estensione di questo integrale all'intero campo delle funzioni sommabili.

Chiude il volume una nota sui numeri trasfiniti, in cui è trattato: 1°) dei numeri derivati; 2°) degli aggregati bene ordinati e degli aggregati trasfiniti; 3°) se sia necessaria una notazione dei numeri trasfiniti; 4°) sul ragionamento per ricorrenza trasfinita; 5°) esame di alcuni ragionamenti per ricorrenza trasfinita.

Il ricco contenuto di questa seconda edizione, che, come si è detto, è in realtà un'opera nuova, la rende meritevole di figurare in ogni biblioteca matematica.

(*n.*)

R. COURANT: *Vorlesungen über Differential-und Integralrechnung.* Band II: Funktionen mehrerer Veränderlicher. (Berlin, J. Springer, 1929, pp. VII+360, figure 88, prezzo RM. 18,60).

Il presente libro viene a completare il corso di lezioni sul Calcolo differenziale ed integrale che il prof. R. COURANT impartisce nell'Università di Göttingen. Già su queste pagine (Vol. VII, 1928, pp. 60-61) si riferì sul primo volume, dedicato alle funzioni di una variabile; per questo secondo, che tratta invece delle funzioni di più variabili, restano in tutto continuati i pregi del precedente volume: trattazione precisa e piana, ravvivata da ben scelti esempi.

L'Autore, nel numero non rilevante di pagine in cui ha creduto di contenere la sua opera, ha trovato modo di accennare alle principali applicazioni, dei concetti svolti, alla geometria ed alla fisica-matematica; e ciò può far sentire, in alcuni punti del libro il desiderio di una qualche maggiore estensione.

La materia svolta è suddivisa in sei Capitoli ed il suo ordine è riassuntivamente il seguente:

Dapprima (Cap. I) vengono richiamati alcuni concetti di geometria analitica, con particolare riguardo a quelli legati alla nozione di determinante, e vengono introdotte le operazioni fondamentali sui vettori.

Si passa poi (Cap. II) alla considerazione delle funzioni di più variabili, e, studiatane la continuità, si viene ai concetti di derivata parziale e di differenziale; seguono il teorema del valore medio, la formula di TAYLOR e le applicazioni alla nozione di vettore (derivata di un vettore, considerazione degli operatori *grad*, *rot*, *div*).

Si trattano successivamente (Cap. III) le funzioni implicite e ne viene fatta applicazione allo studio di curve e superficie date in forma implicita; vengono considerati i sistemi di funzioni di due variabili, le trasformazioni di coordinate e le rappresentazioni; poi, le famiglie di curve e di superficie ed i loro inviluppi; ed infine si studiano i massimi ed i minimi.

Si giunge così (Cap. IV) all'integrazione delle funzioni di più variabili, e di essa viene accuratamente sviluppata la teoria. Seguono le applicazioni geometriche (calcolo dei volumi) e le applicazioni fisiche (momento statico, centro di gravità, momento d'inerzia, potenziale).

Il penultimo capitolo (Cap. V) si riferisce agli integrali curvilinei e di campo, e come applicazione vengono considerati gli integrali di GAUSS, di STOKES e di GREEN.

Da ultimo (Cap. VI) si dà un rapido sguardo alle equazioni differenziali ordinarie e ci si sofferma su notevoli esempi relativi alla meccanica.

Il libro termina con un indice alfabetico ed un'appendice di una trentina di pagine, contenente le formule ed i risultati principali dei due volumi.

La veste tipografica è ottima, le numerose figure sono ben scelte ed accuratamente disegnate.

A. MAMBRIANI

W. SIERPINSKI: *Leçons sur les nombres transfinis.* (Collection de monographies sur la théorie des fonctions). Un vol. in 8° di 240 pag.; Gauthier-Villars, Paris, 1928.

La vasta e profonda cultura dell'A. nella teoria degli insiemi e le sue ricerche personali sono altrettante raccomandazioni, senza riserve, per il libro che Egli presenta ai lettori della Collezione Borel.

Il trattato è diviso in due parti: nella prima di esse sono considerati i numeri cardinali, nella seconda i numeri ordinali.

I primi quattro capitoli, che hanno carattere introduttorio, trattano delle proprietà generali degli insiemi, dei concetti di potenza e di numero cardinale e contengono uno studio alquanto particolareggiato degli insiemi numerabili e di quelli aventi la potenza del continuo.

Nel Cap. V l'A. enuncia due celebri quesiti relativi alla teoria degli insiemi, e cioè: il problema della tricotomia ed il problema del continuo.

Le considerazioni che si trovano svolte in questo capitolo, prescindendo dalla loro intrinseca importanza, hanno certamente l'ufficio di preparare il lettore a ciò che l'A. vorrà dire, nel successivo capitolo, sul postulato di ZERMELO.

Il Cap. VI è da ritenersi indubbiamente il più importante di tutta l'opera: sia per il materiale che lo costituisce, sia per le idee che l'A. ha in proposito.

Il SIERPINSKI infatti, e come dice il BOREL nella prefazione, non nasconde una certa simpatia per il famoso assioma di ZERMELO, di più Egli afferma che: « l'axiome de M. ZERMELO est à l'état actuel de la science indispensable pour la démonstration d'un grand nombre de théorèmes importants de la théorie des ensembles et de l'analyse; il permet de simplifier considérablement différentes parties de ces sciences. Ainsi, que nous soyons personnellement disposés ou non d'accepter l'axiome de M. ZERMELO, nous devons tenir compte de son rôle important dans la théorie des ensembles et dans l'analyse ».

Nonostante queste chiare e precise vedute personali, l'A. tratta lo scabroso e discusso argomento in una forma serena ed imparziale: sia riportando opinioni sfavorevoli di varî matematici, sia illustrando con esempi indovinati e suggestivi l'efficacia e la portata dell'assioma delle scelte nei problemi dell'analisi. Come già ho detto, la seconda parte del libro è dedicata ai numeri ordinali, i quali trovano in essa una trattazione organica e completa.

L'ultimo capitolo dell'opera (il XII) parla del teorema di ZERMELO sugli insiemi ben ordinati e della sua equivalenza all'assioma delle scelte ed al problema della tricotomia.

(*l. o.*)