Bollettino Unione Matematica Italiana

Bonaparte Colombo

Su una classe di equazioni integro-funzionali a limiti variabili

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (1929), n.2, p. 80–85.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_2_80_0>

Su una classe di equazioni integro-funzionali a limiti variabili.

Nota di BONAPARTE COLOMBO (a Torino).

Sunto. - *In questa Nota si dimostra l'esistenza e l'unicità della soluzione di alcune equazioni integro-funzionali a limiti variabili, ottenute generalizzando quelle che s' incontrano nella teoria delle equazioni a derivate parziali del terzo ordine in due variabili, e costituenti un' unica classe alla quale appartengono altresì delle equazioni integrali, integro-differenziali e funzionali.*

In questa Nota studio, col metodo delle successive approssimazioni (¹), una classe di equazioni integro-funzionali a limiti variabili, che credo non siano ancora state considerate: nei §§ 1 e 2 dò per esse i teoremi di esistenza e di unicità, sotto opportune ipotesi, prendendo le mosse, per semplicità, da un caso speciale. A detta classe appartengono, quando si fissino convenientemente alcune funzioni, delle equazioni integro-differenziali a limiti variabili e delle equazioni funzionali (²), che tratto rispettivamente nei §§ 3 e 4.

§ 1. Consideriamo l'equazione integro-funzionale

$$(1) \qquad \varphi(x) + P(x)\varphi(px) + Q(x)\varphi(qx) + \int_{px}^{qx} K(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi = F(x)$$

(¹) Faccio osservare in proposito che già il prof. PICONE, utilizzando esclusivamente, in modo opportuno, le successive approssimazioni, ha indicata una notevole trattazione di un' equazione integrale a limiti variabili di VOLTERRA (« Rend. Lincei », 2° sem., 1910, p. 259; « Rend. Circolo Mat. di Palermo », t. 30, 1910, p. 349; t. 31, 1911, p. 133).

(²) A detta classe appartengono anche equazioni integrali di altre categorie. Fra esse sono degne di rilievo le equazioni integrali di terza specie del tipo di VOLTERRA: su quelle del tipo di FREDHOLM cfr. una Nota del prof. FUBINI (« Rend. Lincei », 1° sem., 1912, p. 325).

nella funzione incognita φ; p e q sono costanti soddisfacenti alle condizioni

$$(2) \qquad |p|, \quad |q| \leq 1;$$

$P(x)$, $Q(x)$ e $F(x)$ sono funzioni finite e continue nell'intervallo I da $-\tau$ a $\tau (\tau > 0)$, e inoltre $F(x)$ è in esso soggetta alla condizione

$$(3) \qquad |F(x)| \leq L\,|x|^r,$$

essendo L ed r delle costanti positive (in particolare anche nulle); $K(x, \xi)$ è una funzione finita e continua nel quadrato C del piano $x\xi$ avente i lati, di lunghezza 2τ, paralleli agli assi e il centro nell'origine (¹); si indichi con M il massimo dei valori assoluti di $K(x, \xi)$ in C e si ponga $N = M\dfrac{\tau}{r+1}$. Vale il

TEOREMA I°. — Nelle ipotesi precedentemente fatte, se il massimo μ della funzione

$$(|P(x)| + N)\,|p|^r + (|Q(x)| + N)\,|q|^r$$

in I è minore di uno, esiste una soluzione φ di (1), finita e continua in I e soddisfacente quivi alla

$$(4) \qquad |\varphi(x)| \leq L_1\,|x|^r,$$

con $L_1 = \dfrac{L}{1-\mu}$; essa è poi unica sotto la condizione che, per qualche L_1, valga la (4).

Infatti poniamo $\varphi_0(x) = F(x)$ e poi successivamente

$$(5) \qquad \varphi_{i+1}(x) = -P(x)\varphi_i(px) - Q(x)\varphi_i(qx) - \int_{px}^{qx} K(x, \xi)\varphi_i(\xi)d\xi \quad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

ed osserviamo che le φ_i riescono tutte definite in I, essendo allora, per le (2), $-\tau \leq px \leq \tau$ e $-\tau \leq qx \leq \tau$. Se ammettiamo ora che sia $|\varphi_i(x)| \leq L\mu^i\,|x|^r$, dalla (5) otteniamo:

$$|\varphi_{i+1}(x)| \leq L\mu^i(|P(x)|\,|p|^r + |Q(x)|\,|q|^r)\,|x|^r + L\mu^i\frac{M}{r+1}(|p|^{r+1} + |q|^{r+1})\,|x|^{r+1} \leq$$
$$\leq L\mu^i(|P(x)|\,|p|^r + |Q(x)|\,|q|^r)\,|x|^r + L\mu^i N(|p|^r + |q|^r)\,|x|^r =$$
$$= L\mu^i\left\{(|P(x)| + N)\,|p|^r + (|Q(x)| + N)\,|q|^r\right\}|x|^r \leq L\mu^{i+1}\,|x|^r;$$

(¹) Avverto che qui e in seguito si fanno delle ipotesi, che un esame accurato potrebbe anche rendere meno restrittive. È ovvio ad es. che è lecito ridurre il campo di esistenza C di $K(x, \xi)$ a quello descritto dai segmenti paralleli all'asse ξ, compresi fra $\xi = px$ e $\xi = qx$, quando x varia in I.

ed, essendo, per la (3), $|\varphi_0(x)| \leq L\mu^0 |x|^r$ ricaviamo per induzione la validità della formula

(6) $$|\varphi_i(x)| \leq L\mu^i |x|^r \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots).$$

Essendo $\mu < 1$, la serie $\sum_{i=0}^{\infty} \varphi_i(x)$ converge in modo totale in I e la sua somma $\varphi(x)$ verifica notoriamente la (1) e soddisfa la (4). È poi unica la soluzione di (1) che soddisfa la (4) per qualche L_1, come si trae notoriamente dalla proprietà che una soluzione di (1), con $F = 0$, la quale soddisfaccia la (4) per qualche L_1, è identicamente nulla, dovendo riuscire $|\varphi(x)| \leq L_1\mu^i |x|^r$ per qualunque i.

§ 2. La trattazione svolta nel § 1 per l'equazione integro-funzionale (1) può estendersi, convenientemente modificata, all'equazione più generale

(1*) $$\varphi(x) + P(x)\varphi[p(x)] + Q(x)\varphi[q(x)] + \int_{p(x)}^{q(x)} K(x, \xi)\varphi(\xi)d\xi = F(x)$$

sempre nella funzione incognita φ: $p(x)$ e $q(x)$ sono ora due funzioni finite e continue in I, nulle per $x = 0$ e soddisfacenti alle condizioni

(2*) $$\left|\frac{p(x)}{x}\right|, \quad \left|\frac{q(x)}{x}\right| \leq 1 \; (^1):$$

rimangono fisse le ipotesi fatte su P, Q, F e K, non che i significati di M ed N (²). Vale il

Teorema II°. — *Nelle ipotesi precedentemente fatte, se il massimo μ della funzione*

$$(|P(x)| + N)\left|\frac{p(x)}{x}\right|^r + (|Q(x)| + N)\left|\frac{q(x)}{x}\right|^r$$

in I è minore di uno, esiste una soluzione φ di (1), finita e continua in I e soddisfacente quivi alla (4), ed è unica sotto la condizione che valga la (4) per qualche L_1.*

(¹) Qui ed in seguito s'intende che il quoziente con x delle funzioni continue, nulle per $x = 0$, che si considerano abbia come valore nel punto $x = 0$ il limite del quoziente stesso, supposto esistente.

(²) Faccio osservare che un'equazione (1*), per la quale non siano soddisfatte le precedenti ipotesi, può talvolta ricondursi all'equazione in esame con un cambiamento di variabile: ed inoltre che i limiti dell'integrale, eguali agli argomenti $p(x)$ e $q(x)$ di φ in due termini di (1*), possono sostituirsi con altre funzioni $p_1(x)$ e $q_1(x)$, tali che per ogni x di I l'intervallo $p_1(x)$, $q_1(x)$ sia contenuto nell'intervallo $p(x)$, $q(x)$, ciò che equivale a supporre $K(x, \xi)$ nulla in un campo evidente.

Infatti, anche ora, ponendo $\varphi_0(x) = F(x)$ e poi successivamente

$$(5^*) \qquad \varphi_{i+1}(x) = -P(x)\varphi_i[p(x)] - Q(x)\varphi_i[q(x)] - \int_{p(x)}^{q(x)} K(x, \xi)\varphi_i(\xi)d\xi \quad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

sicchè le φ_i riescono tutte definite in I, si stabilisce per induzione la (6); invero, se la si suppone valida per un certo i, si trae dalla (5*)

$$\begin{aligned} |\varphi_{i+1}(x)| &\leq L\mu^i \left\{ |P(x)| \left|\frac{p(x)}{x}\right|^r + |Q(x)| \left|\frac{q(x)}{x}\right|^r \right\} |x|^r + \\ &+ L\mu^i \frac{M}{r+1} \left\{ \left|\frac{p(x)}{x}\right|^{r+1} + \left|\frac{q(x)}{x}\right|^{r+1} \right\} |x|^{r+1} \leq \\ &\leq L\mu^i \left\{ (|P(x)| + N) \left|\frac{p(x)}{x}\right|^r + (|Q(x)| + N) \left|\frac{q(x)}{x}\right|^r \right\} |x|^r \leq \\ &\leq L\mu^{i+1} |x|^r . \end{aligned}$$

§ **3.** La (1*), ove si ponga in particolare

$$P(x) = -H[x, p(x)], \quad Q(x) = H[x, q(x)], \quad K(x, \xi) = -\frac{\partial H(x, \xi)}{\partial \xi},$$

con H funzione di due variabili, coincide, come si stabilisce con un'integrazione per parti, colla

$$(7) \qquad \varphi(x) + \int_{p(x)}^{q(x)} H(x, \xi)\varphi'(\xi)d\xi = F(x);$$

questa è un'equazione integro-differenziale di seconda specie a limiti variabili. Come corollario del teorema II° vale il

TEOREMA III°. — Se $p(x)$, $q(x)$ e $F(x)$ sono finite e continue in I e soddisfacenti quivi alle (2*) e (3), se $H(x, \xi)$ e $\frac{\partial H}{\partial \xi}(x, \xi)$ sono finite e continue in C, e se il massimo in I della funzione

$$(|H[x, p(x)]| + N) \left|\frac{p(x)}{x}\right|^r + (|H[x, q(x)]| + N) \left|\frac{q(x)}{x}\right|^r,$$

essendo $N = M\frac{\tau}{r+1}$ ed M il massimo in C di $\left|\frac{\partial H}{\partial \xi}(x, \xi)\right|$, è minore di uno, la (7) ammette una ed una sola soluzione che sia finita e continua in I e soddisfaccia quivi alla (4) per qualche L_1.

§ **4.** La (1*), ove si faccia in particolare $K = 0$, diviene la

$$(8) \qquad \varphi(x) + P(x)\varphi[p(x)] + Q(x)\varphi[q(x)] = F(x).$$

che è un'equazione funzionale. Come corollario del teorema II°, essendo ora $N=0$, vale il

TEOREMA IV°. — Nelle ipotesi del § 2 per le funzioni p, q, P, Q ed F, se il massimo in I di

$$|P(x)|\left|\frac{p(x)}{x}\right|^{r}+|Q(x)|\left|\frac{q(x)}{x}\right|^{r}$$

è minore di uno, la (8) ammette una ed una sola soluzione che sia finita e continua in I e soddisfaccia quivi alla (4) per qualche L_1.

Supponiamo ora che $p(x)$ sia finita, continua, invertibile e variabile in I mentre x varia in un intervallo J, e che in questo $q(x)$, $P(x)$, $Q(x)$, $F(x)$ siano finite e continue, F soddisfaccia la (3), P non si annulli e siano vere le relazioni

$$\left|\frac{x}{p(x)}\right|,\quad\left|\frac{q(x)}{p(x)}\right|\leq 1 \text{ [1]}. \tag{9}$$

Vale allora il

TEOREMA V°. — Nelle ipotesi precedenti, se il massimo in J della funzione

$$\left|\frac{1}{P(x)}\right|\left|\frac{x}{p(x)}\right|^{r}+\left|\frac{Q(x)}{P(x)}\right|\left|\frac{q(x)}{p(x)}\right|^{r}$$

è minore di uno, la (8) ammette una ed una sola soluzione che sia finita e continua in I e soddisfaccia quivi alla (4) per qualche L_1 [2].

Infatti da $x_0=p(x)$ si trae $x=p_0(x_0)$, indicando p_0 la funzione inversa della p; se si pone per semplicità $f_0(x_0)=f[p_0(x_0)]=f(x)$ qualunque sia il simbolo funzionale f (diverso da p), la (8), quando si sostituisca $p_0(x_0)$ ad x e si dividano poi i due membri per $P_0(x_0)$, si muta nella

$$\varphi(x_0)+\frac{1}{P_0(x_0)}\varphi[p_0(x_0)]+\frac{Q_0(x_0)}{P_0(x_0)}\varphi[q_0(x_0)]=\frac{F_0(x_0)}{P_0(x_0)}, \tag{8*}$$

la quale è ancora del tipo (8). Per le (9) valgono in I le relazioni

$$\left|\frac{p_0(x_0)}{x_0}\right|,\quad\left|\frac{q_0(x_0)}{x_0}\right|\leq 1;$$

si ha pure $\left|\frac{F_0(x_0)}{P_0(x_0)}\right|\leq L_0|x_0|^{r}$ per un determinato L_0 e sempre in I;

[1] Dalle (9) si ricava $p(0)=q(0)=0$ e inoltre appare che J è contenuto in I.

[2] Il teorema V° è valido anche scambiando p con q e contemporaneamente P con Q, per la simmetria con cui queste funzioni compaiono nella (8).

è applicabile alla (8*) il teorema IV° e si stabilisce quindi il teorema V°.

Questo teorema si potrebbe anche dimostrare direttamente col metodo delle approssimazioni successive, ponendo $P(x)\varphi_0[p(x)] = F(x)$ e poi

$$P(x)\varphi_{i+1}[p(x)] = -\varphi_i(x) - Q(x)\varphi_i[q(x)] \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots),$$

e utilizzando il solito procedimento.