UMI

Sunti di lavori italiani

* Lavori di: Bruno de Finetti

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (1929), n.2, p. 94–96.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_2_94_0>

SUNTI DI LAVORI ITALIANI

Riassunto di Comunicazione fatta al Congresso Internazionale dei Matematici. (Bologna, Settembre 1928).

DE FINETTI BRUNO: *Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio.* (Sezione IV–A).

Per dare una rapida idea dello scopo e del senso delle ricerche esposte nella comunicazione: *Funzione caratteristica di un fenomeno aleatorio* (1), sarà opportuno ricorrere ai soliti esempi di modelli di urne.

Lo schema delle estrazioni da un'urna di composizione nota non può mai invocarsi a rappresentare in modo soddisfacente la legge di probabilità di un fenomeno statistico, perchè, comunque buona possa ritenersi l'approssimazione numerica, si ha sempre una differenza essenziale per il fatto stesso che la determinazione della probabilità del fenomeno statistico non è basata su di un criterio *a priori*. È dedotta dall'esperienza, ma ogni nuova prova arricchisce quest'esperienza, e il susseguirsi delle nuove prove la potrà convalidare, la potrà correggere, la potrà contraddire.

Quando la probabilità è determinata e nota *a priori*, abbiamo formule insensibili e risultati immutabili per qualunque volger di eventi: se ammettiamo che un fenomeno abbia probabilità costante p, ci impegnamo implicitamente ad attribuire totalmente al *caso* ogni scarto, ogni regolarità, che potessero in seguito verificarsi. Le prime 1000 prove sono tutte favorevoli? La probabilità della successiva sarà $\frac{p^{1001}}{p^{1000}} = p$. Saranno alternativamente una favorevole e una sfavorevole? La probabilità della successiva sarà $\frac{p^{501}(1-p)^{500}}{p^{500}(1-p)^{500}} = p$. Si riscontrerà qualunque altra particolarità? Fa-

(1) Una trattazione più completa si troverà in una Memoria presentata (sedute Dicembre 1928-Gennaio 1929) alla R. Accademia dei Lincei.

tica inutile rilevarla: la probabilità delle prove successive è sempre invariabilmente p: nulla può influenzare il nostro giudizio.

In questo stato d'animo ci troviamo effettivamente quando il giudizio sulla probabilità di un evento è basato su considerazioni *a priori*: se ad esempio un cabalista ci mostrasse che le sue operazioni gli hanno fatto indovinare parecchie volte di seguito un numero del lotto, noi penseremmo senz'altro a un capriccio della fortuna, e ci guarderemmo bene dal prestargli fede per l'avvenire. Ma negli altri casi, nei casi pratici, nelle applicazioni statistiche, il caso è ben diverso.

Perchè un confronto regga, dovremmo pensare a un'urna la cui composizione sia inizialmente ignota o mal nota, e il nostro giudizio si faccia in base all'esperienza delle estrazioni eseguite. La considerazione di questo caso non è certo nuova, ma non mi consta ne sia stata rilevata l'importanza pratica, tanto maggiore di quanto ne possa avere il caso astratto di una probabilità costante nota *a priori*, nè il suo studio è mai stato intrapreso con metodi moderni.

Invece lo strumento della *funzione caratteristica* si mostra singolarmente adatto a tale scopo. Il numero delle ripetizioni su n prove è una variabile casuale la cui funzione caratteristica indichiamo $\psi_n(t)$: si dimostra che, al crescere di n, $\psi_n\left(\frac{t}{n}\right)$ tende uniformemente a $\psi(t) = \sum_{0}^{\infty}{}_h \, \omega_h^{(h)} \frac{i^h t^h}{h!}$, ove $\omega_h^{(h)}$ è la probabilità che le prove siano tutte favorevoli: inversamente, nota $\psi(t)$, si deducono mediante una semplice operazione tutte le $\psi_n(t)$. La $\psi(t)$ e la $\Phi(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it} - e^{-i\xi t}}{it} \psi(t) dt$ (di cui abbiamo dimostrata l'esistenza) sono quelle che abbiamo chiamato, per definizione, rispettivamente *funzione caratteristica* e *funzione di ripartizione* del fenomeno aleatorio.

Il significato della Φ è chiarito dai seguenti teoremi: la probabilità che la frequenza su n prove sia compresa fra ξ_1 e ξ_2 $(\xi_1 < \xi_2)$ tende a $\Phi(\xi_2) - \Phi(\xi_1)$ quando $n \to \infty$.; la probabilità che le frequenze dopo l'n-^{ma}, per quante ulteriori prove si facciano, siano tutte comprese tra ξ_1 e ξ_2 $(\xi_1 < \xi_2)$ tende a $\lim_{\xi = \xi_2} s\Phi(\xi) - \lim_{\xi = \xi_1} \delta\Phi(\xi)$ quando $n \to \infty$.

I problemi sui fenomeni aleatori si traducono in operazioni distributive (a meno, eventualmente, della moltiplicazione per una costante) sulle loro funzioni caratteristiche. Così, se un fenomeno aleatorio ha la funzione caratteristica $\psi(t)$, il fenomeno contrario ha la funzione caratteristica $e^{it}\psi(-t)$, il fenomeno stesso dopo una prova favorevole ha la funzione caratteristica $U \cdot D\psi(t)$ $\Big(D$, derivazione, U, costante moltiplicativa che rende $= 1$ il valore della funzione nell'origine: $U \cdot f(t) = \frac{1}{f(0)} f(t)\Big)$, dopo una prova sfavorevole $U \cdot (i - D)\psi(t)$, dopo $r + s$ prove, r favorevoli e s sfavorevoli, $U \cdot D^r(i - D)^s\psi(t)$. Ad ogni prova favorevole o sfavorevole corrisponde la trasformazione operata sulla funzione caratteristica rispettivamente dall'operazione D o $(i - D)$; in ciò si manifesta e sintetizza la sensibilità del giudizio dedotto dall'esperienza al continuo arricchirsi e modificarsi dell'esperienza stessa.

È ovvio che tale sensibilità si vada smorzando quanto più vasta è l'esperienza su cui il giudizio è fondato. E abbiamo infatti un teorema assai notevole nel campo delle relazioni fra probabilità e frequenza che esprime in modo preciso il fatto seguente: qualunque fenomeno, dopo aver osservato su n prove la frequenza f, può essere assimilato con qualunque grado d'approssimazione si voglia a un fenomeno di probabilità costante uguale ad f purchè n sia sufficientemente grande (e a meno che non si verifichi un caso d'eccezione: che in un intorno di f la $\Phi(\xi)$ sia costante).

Roma, 23 marzo 1929 (VII).