Sunti di lavori esteri

* Lavori di: G. Julia, L. G. du Pasquier, N. Wiener, T. Rado, E. Borel, S. Kempisty, N. Obrechkoff, S. A. Jänczewski, E. Vessiot, F. W. Perkins, A. Roussel, W. Saxer, C. Jordan, E. Lainé, R. Gosse, E. Goursat, P. Nouillon, B. Segre, O. Onicescu, H. Härlen, F. Vasilesco, G. Fichtenholz, G. Bouligand, P. Flamant, A. Weinstein, P. Levy, G. Pòlya, D. V. Jonesco, G. Cerf, M. Mandelbrojt, N. Potrou, B. Segre, G. Pòlya, P. Tzitzeica, G. Bouligand, P. Humbert, J. Wolff, N. Wiener, A. Kovanko, S. A. Gheorgiu, D. V. Jonesco, L. Pomey, E. Tornier, E. Borel, lì. V. Widder, N. Bary, J. J. Gergen, G. Julia, M. Gevrey, G. Cerf, L. Leau, E. Selivanowski, L. W. Cohen, G. Fichtenholz, A. Buhl, M. Lavrentieff, V. Kostitzin, S. Sarantopoulos, M. Alander, R. Lagrange, M. Biquier, A. Roussel, G. Pòlya, M. Biernacki, M. Lavrentieff

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (1929), n.2, p. 97–107.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_2_97_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1929.

SUNTI DI LAVORI ESTERI

Recensioni delle Note di *Analisi* pubblicate nei « Comptes Rendus », T. 184 (1° semestre 1927).

G. JULIA (« Comptes Rendus », T. 184, pag. 21).

Prosegue le sue interessanti ricerche sulle medie dei moduli delle funzioni analitiche [1]. Enuncia un teorema che generalizza quello di SCHWARZ e di HARDY: « Se $f(z)$ ha uno zero d'ordine k all'origine, e se $m(\tau)$ è la media d'ordine p di $f(z)$ su $|z| = \tau$, si ha $\frac{m(\tau_1)}{m(\tau_2)} \leq \left(\frac{\tau_1}{\tau_2}\right)^k$, nel cerchio k di convergenza e per $0 < \tau_1 < \tau_2 < k$ ».

L. G. DU PASQUIER (Ibid., pag. 59).

Cerca la forma più generale che conviene di dare a quattro quaternioni linearmente indipendenti Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 affinchè i quaternioni $m_1 Q_1 + m_2 Q_2 + m_3 Q_3 + m_4 Q_4$ si riproducano per addizione, sottrazione e moltiplicazione, quando m_1, m_2, m_3, m_4 prendono, indipendente l'uno dall'altro, i valori da $-\infty$ ad $+\infty$ [2]. Questi gruppi si ripartiscono in due categorie; ne dà diversi esempi.

N. WIENER (Ibid., pag. 52).

Considera l'operazione Δ di LAPLACE come l'analoga in S_3 della differenziazione in S_1, e definisce ciò che si deve intendere come funzione a variazione limitata [3].

T. RADÒ (Ibid., pag. 63).

Riprende le ricerche di GEÖCZE [4] sulla quadratura delle superficie, e richiama l'attenzione nel caso che $f(x, y)$, senza soddi-

(1) « Comptes Rendus », T. 182, (1926), p. 1201, p. 1234; « Comptes Rendus », T. 183, (1926), p. 10.

(2) « Comptes Rendus », T. 175, (1922), p. 465.

(3) TONELLI, « Comptes Rendus », T. 182, (1926), p. 1198.

(4) GEÖCZE, « Thèse », Paris: « Math. u. Naturw. Berichte aus Ungarn ». (1910), pp. 1-88.

sfare alla condizione di LIPSCHITZ, sia solamente una funzione continua.

E. BOREL (Ibid., pag. 52).

Precisa alcune sue Note precedenti trattando la connessione tra i sistemi di forme lineari a determinante simmetrico e la teoria generale dei giuochi nel calcolo delle probabilità.

— — (Ibid., pag. 54).

Tratta della probabilità perchè un segmento, di cui le due estremità siano interne ad un cerchio, sia inferiore ad ε (1).

S. KEMPISTY (Ibid., pag. 69).

H. A. NEWMAN (2) ha mostrato che la derivata nelle famiglie regolari d'un insieme aperto della variazione di una funzione a variazione limitata è approssimativamente continua; dimostra che si può integrare asintoticamente con il procedimento da lui indicato. determinando così la primitiva (3).

N. OBRECHKOFF (Ibid., pag. 271).

Dà un metodo diretto che permette in certi casi di concludere che una serie di potenze ha, sul cerchio di convergenza, delle singolarità non polari.

S. A. JANCZEWSKI (Ibid., pag. 141; pag, 261; pag. 848).

Considera un sistema di equazioni differenziali lineari del 4° ordine di una forma speciale con delle condizioni ai limiti e li chiama di STURM. Indica nella seconda Nota dieci forme canoniche possibili di questo sistema ed enuncia diversi risultati. Nella terza Nota dà alcune correzioni alle Note precedenti.

E. VESSIOT (Ibid., pag. 143).

Prosegue le sue ricerche sui fasci di trasformazioni infinitesimali (4), studia l'integrazione di un tale fascio di grado n ad $n+1$ variabili (5).

(1) BOREL, *Traité du Calcul des probabilités*, 1925, Gauthier-Villars, p. 78.

(2) *On approximate continuity.* « Transactions of the Cambridge Philos. Society », 23, (1925), p. 16.

(3) « Comptes Rendus », T. 180, (1925), p. 812.

(4) « Bull. Soc. Math. », 52, (1924), p. 336.

(5) E. VESSIOT, « Acta Math. », 28, (1904), p. 311.

F. W. PERKINS (Ibid., pag. 182).

LEBESGUE ha mostrato come si può risolvere il problema di DIRICHLET mediante successioni di *mediations réiterées* (1); l'A. fa alcune osservazioni ed utilizza il metodo di *balayage* di POINÇARÉ.

A. ROUSSEL (Ibid., pag. 184; pag, 431).

Estende il teorema di ASCOLI sulla funzione di accumulazione nel campo funzionale. Nella seconda mostra che già FRÉCHET aveva trovato questo risultato (2).

W. SAXER (Ibid., pag. 264).

Risponde ad una questione posta da MONTEL (3), determinando le condizioni necessarie e sufficienti affinchè una funzione meromorfa per $|z| \geq R$ sia quasi-eccezionalmente d'ordine finito [cioè tale che le famiglie $f(\sigma_n z)$ siano soltanto quasi-normali, con dei punti irregolari d'ordine finito e $\lim\limits_{n=\infty} \sigma_n = +\infty$].

C. JORDAN (Ibid., pag. 315).

Tratta un caso generalizzato della probabilità delle prove ripetute e mostra che per questo studio sono importanti le funzioni ipergeometriche di APPELL.

E. LAINÉ (Ibid., pag. 319).

Studia una equazione alle derivate parziali del 2° ordine della quale fa conoscere l'integrale generale; e che può essere ricondotta ad una equazione di MOUTARD con una trasformazione di BÄCKLUND.

R. GOSSE (Ibid., pag. 363).

Studia una classe di equazioni della forma $s = f(x, y, z, p, q)$ (4).

E. GOURSAT (Ibid., pag. 364).

Fa vedere la connessione fra i risultati di GOSSE, della Nota precedente, e quelli di LAINÉ (5).

(1) « Comptes Rendus », 154, (1912), p. 335.

(2) « A. É. Normale », 38, (1921), p. 361; « Rendiconti Palermo », 30, (1910); Ibid., 22, (1906).

(3) MONTEL, « Bull. Soc. Math. », 52, (1904), p. 85; OSTROWSKI, « Math. Zeitschr. », 24, (1925), p. 215.

(4) « Comptes Rendus », T. 182, (1926), p. 1597.

(5) « Comptes Rendus », T. 184, (1927), p. 319.

P. NOUILLON (Ibid., pag. 360).

Tratta dei punti singolari isolati non critici di una funzione armonica e generalizza un teorema di PICARD; mostra che se una funzione armonica intera $f(M)$ è tale che per un valore dato non negativo di p il rapporto $\frac{f(M)}{r^p} < A$, essa si riduce ad un polinomio armonico al più di grado uguale a p.

B. SEGRE (Ibid., pag. 268).

Studia l'integrazione di un sistema di equazioni alle derivate parziali lineari del terzo ordine e mostra che può ricondursi alla integrazione di una sola equazione di LAPLACE.

O. ONICESCU (Ibid., pag. 365; pag. 733).

Continua una Nota precedente [1] nell'*ajustage* d'un insieme di valori e mostra che l'algoritmo determinato può applicarsi alla rappresentazione d'una funzione. Nella sua seconda Nota studia la rappresentazione delle funzioni mediante integrali.

H. HÄRLEN (Ibid., pag. 367).

Considera i paradossi della teoria degli insiemi, come quelli di RUSSELL e di BURALI-FORTI.

F. VASILESCO (Ibid., pag. 434).

Considera i valori limiti di una funzione armonica $f(P)$ definita nell'interno del cerchio per i valori dati sul contorno e ne cerca il limite quando P tende verso il contorno in una maniera qualunque.

G. FICHTENHOLZ (Ibid., pag. 436).

KOVANKO ha dato delle condizioni necessarie e sufficienti affinchè una successione di funzioni sommabili sia integrabile [2]. L'A. mostra che una delle condizioni è superflua, come aveva mostrato nel 1918 [3], e come risulta anche da un teorema di VITALI [4].

[1] « C. R. », T. 183, (1926), p. 1258.

[2] « Comptes Rendus », T. 182, (1926), p. 526; « Comptes Rendus », T. 183, (1926), p. 426.

[3] *Théorie des integrales définies dépendantes d'un paramètre* (in russo). Petrograd. 1918, p. 152.

[4] « Rendiconti Circolo di Palermo », 23, (1907), p. 147; TONELLI, « C. R. », T. 182, (1926), p. 838.

G. BOULIGAND (Ibid., pag. 430).

Trova delle curve piane di JORDAN non rettificabili e nelle quali si può ripartire uniformemente delle masse che generano un potenziale limitato. Mostra l'importanza della Nota di PERKINS (¹), e di un enunciato di ZAREMBA (²).

P. FLAMANT (Ibid., pag. 432).

Riprende alcune considerazioni sulle trasmutazioni lineari $Tx^n = \xi_n(x)$ ed applica la trasmutazione alla serie di TAYLOR e dà delle condizioni di validità.

A. WEINSTEIN (Ibid., pag. 497).

Studia il problema di determinare tutte le funzioni armoniche in una banda indefinita S compresa fra le rette $y = 0$ ed $y = 1$ del piano xy, che soddisfano al contorno alle condizioni seguenti: $u = 0$ per $y = 0$, $\frac{du}{dn} = pu$ per $y = 1$. Ed applica un metodo di BOULIGAND per ottenere le soluzioni.

P. LÉVY (Ibid., pag. 500 e pag. 663).

Tratta della iterazione della funzione esponenziale: pone $e_1(x) = e^x$, $e_{p+q}(x) = e_p(e_q(x))$ e cerca una funzione $e_n(x)$ crescente regolarmente con n e che per n interi coincida con i simboli precedenti. Nella Nota seguente dà una generalizzazione trattando di una funzione continua crescente per $x > a$ e $\to \infty$ con x.

G. PÒLYA (Ibid., pag. 502).

Fa presente alcuni risultati di MANDELBROJT e mostra che una serie di potenze regolare per $|z| < 1$, e che non ha dei punti singolari algebrico-logaritmici nel cerchio $|z| = 1$, non può avere lacune arbitrariamente grandi, e studia due serie di potenze convergenti per $|z| < 1$ e tali che gli esponenti dei termini formino due successioni complementari.

D. V. JONESCO (Ibid., pag. 505 e pag. 665).

Studia una classe di equazioni funzionali che risolve per approssimazioni successive. Nella seconda Nota i risultati vengono applicati ad una classe di equazioni integro-differenziali.

(¹) « Comptes Rendus », T. 184, (1927); p. 182.
(²) « Comptes Rendus », T. 182, (1926), p. 1129.

G. CERF (Ibid., pag. 507).

Riprende un lavoro di B. SEGRE [1] e fa rientrare questo studio in una teoria generale per i sistemi d'involuzione d'ordine q.

M. MANDELBROJT (Ibid., pag. 509 e pag. 1307).

Completa un teorema importante di FATOU sulle serie di potenze, e mostra che si può, cambiando una infinità di termini, fare in modo che i punti singolari situati sul cerchio di convergenza abbiano lo stesso ordine della funzione sul cerchio di convergenza.

Nella seconda Nota dà una rettifica alla prima e considera una classe di serie di potenze.

N. POTROU (Ibid., pag. 572).

Tratta della divisione di un sistema di numeri interi in gruppi di somme date.

B. SEGRE (Ibid., pag. 573).

Per lo studio del problema delle prove ripetute si possono costruire dei diagrammi di probabilità che quando il numero delle prove è abbastanza grande tendono verso la curva delle probabilità; l'A. dà delle proprietà geometriche di questi diagrammi.

G. PÒLYA (Ibid., pag. 579).

Introduce la definizione di punto singolare semi-isolato ed isolato, e dimostra un interessantissimo teorema che generalizza un teorema di HADAMARD sulla singolarità delle serie $\Sigma a_k b_k z^k$.

P. TZITZEICA (Ibid., pag. 582).

Fa vedere l'importanza dei risultati di B. SEGRE [2] che permettono di dare una interpretaziono geometrica ad un risultato interessante di BOMPIANI [3].

G. BOULIGAND (Ibid., pag. 661).

Dà un metodo elementare che conferma l'esattezza del principio delle singolarità positive di PICARD, e dà altre interessanti applicazioni del metodo.

(1) « Comptes Rendus », T. 184, (1927), p. 268.
(2) « Comptes Rendus », T. 184, (1927), p. 1268.
(3) « Rendiconti Istituto Lombardo », (1919).

P. HUMBERT (Ibid., pag. 731).

Riprende i suoi interessanti lavori [1] generalizzanti l'equazione di MATHIEU, trovando quì una generalizzazione dell'equazione di LAMÈ.

J. WOLFF (Ibid., pag. 795).

Generalizza un teorema di JENTZSCH. Sia uno il raggio di convergenza della serie $\Sigma a_k x^k$, ed almeno uguale ad uno quello della serie $\Sigma b_k x^k$, se si pone $f_n(x) = \sum_0^n a_k x^k$, allora ciascun cerchio di centro $x = 1$ contiene per una infinità di valori di n una radice dell'equazione $f_n(z) = b_n$ nel suo interno.

N. WIENER (Ibid., pag. 793).

Mediante la teoria degli integrali di FOURIER dimostra un teorema di TAUBE [2].

A. KOVANKO (Ibtd., pag. 993 e pag. 1156).

Fa alcune osservazioni alla Nota di FICHTENHOLZ [3]; nella seconda Nota dà una condizione necessaria e sufficiente perchè una funzione di classe (I) converga verso una funzione di classe non superiore alla prima.

S. A. GHEORGIU (Ibid., pag. 864 e pag. 1309).

Mediante i risultati di CARLEMAN [4] e LANDSBERG [5] studia i denominatori $D(x)$ di FREDHOLM. Nella seconda considera un nucleo proveniente per composizione da due nuclei reali ed integrabili; dà importanti risultati sulle funzioni intere che si riattaccano a quelle di VALIRON [6].

D. V. JONESCO (Ibid., pag. 866).

Studia l'equazione $s = az + bp + cq + f$ e dimostra un teorema di esistenza per i suoi integrali.

(1) « Proceding R. Society Edinburgh ».
(2) « Monatsch. f. Math. u. Phys. », 8, (1897), p. 273.
(3) « Comptes Rendus », T. 184, (1927), p. 436.
(4) « Arkiv. für. Math. Astr. och. fysik. », 12, (1917), n. 15.
(5) « Math. Annalen », 69, (1910), p. 231.
(6) « Bull. Sciences Math. », (1921), p. 258.

L. Pomey (Ibid., pag. 925 e pag. 1400).

Tratta dell'equazione integro-differenziale alle derivate parziali d'ordine ∞ la cui soluzione ha lo stesso campo d'esistenza dei coefficienti. Nella seconda Nota dà delle condizioni generalissime affinchè le soluzioni d'una equazione differenziale d'ordine ∞ abbia lo stesso campo di esistenza dei coefficienti.

E. Tornier (Ibid., pag. 990).

Fa vedere come la teoria della probabilità può essere utile per la dimostrazione di alcuni teoremi d'analisi: così in aritmetica permette di prevedere che l'insieme dei numeri primi è ∞ e che la serie dei loro inversi è divergente.

E. Borel (Ibid., pag. 993).

Attira l'attenzione dei matematici sulla Nota precedente di Tornier.

D. V. Widder (Ibid., pag. 1038).

Dà una generalizzazione del teorema di Hadamard, sulla moltiplicazione delle singolarità, per le serie di Dirichlet, applicando un integrale analogo agli integrali di Parseval e di Dell'Agnola.

N. Bary (Ibid., pag. 1112).

Enuncia il teorema: ogni funzione continua è la somma di due funzioni di cui ciascuna possiede una derivata in un certo insieme E di misura maggiore di zero in ogni parte di (a, b).

J. J. Gergen (Ibid., pag. 1040).

Pone in relazione la nozione di lacuna generalizzata introdotta da Mandelbrojt con la lacuna nel senso ordinario e dimostra interessanti teoremi.

G. Julia (Ibid., pag. 1107 e pag. 1227).

Dà una generalizzazione di un suo teorema sulla rappresentazione conforme [1]. Nella seconda Nota studia una classe di polinomi e dà importanti conseguenze per lo studio delle singolarità.

M. Gevrey (Ibid., pag. 1109 e pag. 1632).

Considera l'equazione di tipo ellittico del secondo ordine ad n variabili, mostra che la soluzione dipende da una funzione di

[1] « Comptes Rendus ». T. 183, (1926). p. 10.

GREEN che costruisce con una funzione ausiliaria; nella seconda Nota dà un metodo indipendente dalla funzione di GREEN, metodo che permette di trattare il caso in cui il contorno contiene dei punti singolari.

G. CERF (Ibid., pag. 1229).

Tratta dell'invarianza del gruppo delle trasformazioni di contatto e le trasformazioni di certe equazioni alle derivate parziali del secondo ordine ad n variabili indipendenti. Considera una corrispondenza che generalizza il problema di BÄCKLUND,

L. LEAU (Ibid., pag. 1154).

Estende nel campo geometrico il procedimento di ragionamento per ricorrenza classico nel campo dei numeri interi.

E. SELIVANOWSKI (Ibid., pag. 1311).

Tratta una classe di insiemi definiti da una infinità numerabile di condizioni.

L. W. COHEN (Ibid., pag. 1368).

Mostra la non equivalenza delle definizioni delle dimensioni di un insieme dovute a MENGER (1) e URYSOHN (2), nel caso generale di uno spazio topologico.

G. FICHTENHOLZ (Ibid., pag. 1370 e pag. 1528).

Considera una successione $\{u_n\}$ di funzioni armoniche nell'interno del cerchio unità k, $u_n = u_n(r, \theta)$ e dà delle condizioni necessarie e sufficienti perchè questa successione converga verso la funzione della stessa natura nell'interno di k.

Nella seconda Nota tratta lo stesso problema per le funzioni analitiche.

A. BUHL (Ibid., pag. 1398).

In seguito alla Memoria di CARTAN (3) mostra che la considerazione di certe forme di PFAFF permette di sintetizzare dei teoremi generali relativi ai gruppi continui ed ai loro gruppi parametrici.

(1) « Monatsh. f. Math. u. Phys. », 33, (1923), p. 148.

(2) « Comptes Rendus », T. 175, (1922), p. 440.

(3) *La Géométries des Groupes de transformations.* « Journ. de Math. », 6, (1927).

M. Lavrentieff (Ibid., pag. 1407).

Studia la corrispondenza di due frontiere nella corrispondenza conforme.

V. Kostitzin (Ibid., pag. 1403).

Tratta delle soluzioni delle equazioni di Volterra a limiti infiniti e fa delle considerazioni sulla interpretazione filosofica delle equazioni integrali.

S. Sarantopoulos (Ibid., pag. 1409).

Continua le ricerche di Borel sulle funzioni meromorfe [1], e sui coefficienti dello sviluppo di Taylor di una funzione meromorfa in un cerchio.

M. Alander (Ibid., pag. 1411).

Mostra che se C è un ramo chiuso semplice di una curva $|f(z)| = C$ ove f è analitica, e se C racchiude p zero di f e q poli di f, distribuiti in $\beta \leq q$ punti distinti, C racchiude $p - \beta - 1$ zeri della derivata.

R. Lagrange (Ibid., pag. 1405).

Generalizza le operazioni razionali sulle successioni a_n o sulle serie di potenze e fa alcune applicazioni.

M. Riquier (Ibid., pag. 1507).

Prosegue le sue ricerche studiando l'integrale generale dell'equazione $s = f(x, y, z, p, q)$ e determina λ e μ in maniera che l'inviluppo dei piani

$$z = \alpha y + \beta x + \lambda(\beta, \alpha) + \mu\alpha$$

abbia come inviluppo una superficie integrale dell'equazione data.

J. Hjelmstev (Ibid., pag. 1523).

Date n serie di potenze di n variabili trova gli invarianti: cioè le funzioni dei coefficienti che si trasformano in esse stesse quando ai coefficienti si sostituiscono i coefficienti corrispondenti delle serie trasformate.

(1) « Bull. Soc. Math. », 18, (1894), p. 22.

A. ROUSSEL (Ibid., pag. 1525).

Mostra un metodo intermediario di calcolo delle variazioni tra quello di LEBESGUE-HILBERT ed i metodi classici.

G. PÒLYA (Ibid., pag. 1526).

Risponde ad una questione posta da BLOCH [1]. JULIA ha mostrato che una funzione intera prende tutti i valori salvo uno al più una ∞ di volte nell'intorno angolare qualunque di certe semirette uscenti dall'origine (semi-rette di JULIA). PÒLYA definisce queste semi-rette partendo dai coefficienti dello sviluppo della funzione in serie di TAYLOR e dà importanti risultati sull'ordine delle funzioni intere.

M. BIERNACKI (Ibid., pag. 1530).

Completa una Nota precedente, ove aveva mostrato, che in generale una funzione intera, di cui tutti gli zeri sono reali, possiede una derivata le cui direzioni degli zeri non possono accumularsi che sull'asse reale, mostra delle funzioni intere che non soddisfano a questo teorema.

M. LAVRENTIEFF (Ibid., pag. 1634).

Dà una condizione necessaria e sufficiente perchè un continuo possa essere considerato come l'insieme dei punti irregolari d'una successione di funzioni analitiche convergenti entro un cerchio.

R. Università di Milano, Dicembre 1928.

GIUSEPPE BELARDINELLI

[1] « Mémorial des Sciences Math. », Fasc. XX, p. 16.