Pia Nalli

Sui simboli di Riemann e sulla rappresentazione conforme

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (1929), n.3, p. 129–132.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_3_129_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1929.

Sui simboli di Riemann e sulla rappresentazione conforme.

Nota di PIA NALLI (a Catania).

Sunto. - *Si fa vedere come l'uso di coordinate geodetiche permette di dimostrare con la massima semplicità la relazione che lega i simboli di* RIEMANN *di prima specie di una varietà e quelli di una varietà geodetica in essa immersa, nel polo di quest'ultima, e la relazione tra i detti simboli per due varietà in rappresentazione conforme.*

Lo scopo della presente Nota è di mettere in vista, per mezzo di due esempî, i vantaggi che presenta l'uso di coordinate geodetiche per lo studio degli spazî di RIEMANN.

1° ESEMPIO. — Sia V_n una varietà metrica, P un suo punto, V_m una varietà geodetica di polo P immersa nella V_n.

Riferita questa a coordinate $x_1, x_2, \ldots x_n$ e la V_m a coordinate $u_1, u_2, \ldots u_m$, siano

$$x_i = x_i(u_1, u_2, \ldots u_m) \qquad (i = 1, 2, \ldots n) \tag{1}$$

le equazioni parametriche di V_m.

Denotando con (ij, hk) i simboli di RIEMANN di prima specie per la V_n e con $(ij, hk)'$ gli stessi per la V_m, si ha in P

$$(ij, hk)' = \sum_{pqrt}^{n}{}_{1} (pq, rt) \frac{\partial x_p}{\partial u_i} \frac{\partial x_q}{\partial u_j} \frac{\partial x_r}{\partial u_h} \frac{\partial x_t}{\partial u_k}. \tag{2}$$

Evidentemente basterà dimostrare ciò per due particolari sistemi di coordinate x_i ed u_j, e noi supporremo che tali sistemi siano geodetici in P.

Di più supporremo che se per la V_n è

$$ds^2 = \sum_{ij}{}_{1}^{n} a_{ij}\, dx_i\, dx_j,$$

sia in P, $a_{ij} = \delta_i^j$.

Sia poi per la V_m

$$ds^2 = \sum_{1}^{m}{}'_{ij}\, b_{ij}\, du_i\, du_j\,;$$

sarà

$$b_{ij} = \sum_{1}^{n}{}_{pq}\, a_{pq} \frac{\partial x_p}{\partial u_i} \frac{\partial x_q}{\partial u_j}. \tag{3}$$

Se L è una geodetica per P in V_m essa sarà pure geodetica in V_n e sarà per essa in P

$$\frac{d^2 x_i}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2 u_j}{ds^2} = 0,$$

perchè le coordinate x_i ed u_j sono geodetiche in P. Ma allora dalle (1), derivando due volte rispetto ad s, risulta in P

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial u_h \partial u_k} = 0, \qquad \begin{array}{r}(i = 1, 2, \ldots n),\\ (h, k = 1, 2, \ldots m).\end{array} \tag{4}$$

Sempre per il fatto che in P le coordinate x_i ed u_j sono geodetiche, si ha in esso

$$(ij, hk) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_j \partial x_h} - \frac{\partial^2 a_{ih}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 a_{jk}}{\partial x_i \partial x_h} + \frac{\partial^2 a_{jh}}{\partial x_i \partial x_k}\right), \tag{5}$$

ed un'altra analoga se ne ha per $(ij, hk)'$ cambiando nel secondo membro le a in b e le x in u.

Ma dalle (3), tenendo conto che in P sono soddisfatte le (4), che sono nulle le derivate parziali delle a_{ij} rispetto alle x, che $a_{ij} = \delta_i^j$, si ricava che in P

$$\frac{\partial^2 b_{ik}}{\partial u_j \partial u_h} = \sum_{1}^{n}{}_{pqrt} \frac{\partial^2 a_{pt}}{\partial x_q \partial x_r} \frac{\partial x_p}{\partial u_i} \frac{\partial x_q}{\partial u_j} \frac{\partial x_r}{\partial u_h} \frac{\partial x_t}{\partial u_k} + P_{ijh\,,\,k} + P_{kjh\,,\,i},$$

dove

$$P_{ijh\,,\,k} = \sum_{1}^{n}{}_{p} \frac{\partial^3 x_p}{\partial u_i \partial u_j \partial u_h} \frac{\partial x_p}{\partial u_k}.$$

Da questa relazione, tenendo conto della (5) e della analoga per la V_m, discende immediatamente la (2). Dalla quale poi si deduce facilmente che *la curvatura della V_m in P per una giacitura determinata da due direzioni, coincide con la curvatura della V_n in P per la medesima giacitura.*

2° Esempio. — Siano V_n e V_n' due varietà metriche in rappresentazione conforme. Se per la V_n

$$ds^2 = \sum_{ij\,1}^{n} a_{ij}\, dx_i\, dx_j,$$

e per la V_n', $ds' = u^{-1} ds$, cosicchè per essa

$$ds'^2 = \sum_{ij\,1}^{n} a_{ij}'\, dx_i\, dx_j,$$

con $a_{ij}' = u^{-2} a_{ij}$, è noto che i simboli di Riemann (ij, hk), $(ij, hk)'$ di V_n e V_n' in due punti corrispondenti P e P' sono legati dalla relazione

$$\begin{aligned}u^2(ij, hk)' - (ij, hk) = \frac{1}{u}\,(a_{ih}u_{jk} - a_{ik}u_{jh} - a_{jh}u_{ik} + a_{jk}u_{ih}) -\\ - (a_{ih}a_{jk} - a_{ik}a_{jh})\,\frac{\Delta u}{u^2},\end{aligned} \tag{6}$$

dove u_{jk} denota il derivato secondo covariante dell'invariante u e Δu il primo parametro differenziale di tale invariante, rispetto alla metrica di V_n (¹).

La dimostrazione di questa formula è assai penosa quando la si faccia in coordinate generiche, ma riesce semplicissima quando si fissino le coordinate x_i in modo che per la V_n siano geodetiche in P e che in questo punto sia $a_{ij} = \delta_i^j$.

Infatti, in tale ipotesi, posto $v = u^{-2}$ si ha in P'

$$\frac{\partial a'_{ik}}{\partial x_j} = a_{ik} v_j$$

e

$$\frac{\partial^2 a'_{ik}}{\partial x_j\, \partial x_h} = a_{ik} v_{jh} + v\,\frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial x_j\, \partial x_h}. \tag{7}$$

Dalla prima, denotando con $\begin{bmatrix} ih \\ p \end{bmatrix}'$ i simboli di Christoffel per la V_n', si trova in P':

$$\begin{bmatrix} ih \\ p \end{bmatrix}' = \frac{1}{2}\,(a_{ip}v_h + a_{hp}v_i - a_{ih}v_p). \tag{8}$$

D'altra parte, tenendo conto che in P'

$$a_{ij}' = v\delta_i^j,$$

(¹) Cfr. p. es. T. Levi-Civita, *Lezioni di calcolo differenziale assoluto.* (Roma, Stock, 1925), pp. 237-242.

si ha

$$\left\{ \begin{matrix} ih \\ p \end{matrix} \right\}' = v^{-1} \begin{bmatrix} ih \\ p \end{bmatrix}'. \tag{9}$$

Intanto in P vale la (5) ed in P'

$$(ij, hk)' = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a'_{ik}}{\partial x_j \partial x_h} - \frac{\partial^2 a'_{ih}}{\partial x_j \partial x_k} - \frac{\partial^2 a'_{jk}}{\partial x_i \partial x_h} + \frac{\partial^2 a'_{jh}}{\partial x_i \partial x_k}\right)$$
$$- \sum_1^n {}_p \left(\begin{bmatrix} ih \\ p \end{bmatrix}' \left\{ \begin{matrix} jk \\ p \end{matrix} \right\}' - \begin{bmatrix} ik \\ p \end{bmatrix}' \left\{ \begin{matrix} jh \\ p \end{matrix} \right\}'\right).$$

Tenendo conto delle (7), (8) e (9) e che in P

$$\Delta v = \sum_1^n {}_p v_p{}^2$$

si trova, con un facilissimo calcolo,

$$(ij, hk)' + \frac{3}{4} v^{-1}(a_{ik} v_j v_h - a_{ih} v_j v_k - a_{jk} v_i v_h + a_{jh} v_i v_k) +$$
$$+ \frac{1}{4} v^{-1}(a_{ih} a_{jk} - a_{ik} a_{jh}) \Delta v = v(ij, hk) + \frac{1}{2}(a_{ik} v_{jh} - a_{ih} v_{jk} - a_{jk} v_{ih} + a_{jh} v_{ik}).$$

Se ora in questa si pone $v = u^{-2}$, tenendo conto che

$$v_i = -2u^{-3} u_i, \quad \Delta v = 4u^{-6} \Delta u,$$
$$v_{ik} = 6u^{-4} u_i u_k - 2u^{-3} u_{ik},$$

si ottiene appunto la (6).