Letterio Laboccetta

II fattore alternante. Sue espressioni analitiche; sua generazione geometrica

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (1929), n.3, p. 137–142.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_3_137_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione
Matematica Italiana, 1929.

Il fattore alternante.
Sue espressioni analitiche; sua generazione geometrica.

Nota di LETTERIO LABOCCETTA (a Roma).

Sunto. - *Ricordato lo sviluppo in serie di Fourier del fattore alternante, se ne dà l'espressione mediante un integrale definito; quindi altre espressioni che ne differiscono nei punti di discontinuità indicando il modo di eliminare le differenze; segue una definizione geometrica come funzione circolare o sferica.*

1. Fra le funzioni poligonali periodiche la più semplice di tutte è il *fattore alternante,* quella cioè che ha il valore costante $+1$ nelle semi-onde dispari, il valore costante -1 nelle semi-onde di ordine pari e prende il valore zero nei punti di separazione delle successive semi-onde.

Di questa funzione, che indicherò qui appresso brevemente con $\mathrm{Fal}\, x$, ha dato l'espressione in serie trigonometrica lo stesso FOURIER [1] scrivendola

$$(1) \qquad y = \cos x - \frac{1}{3}\cos 3x + \frac{1}{5}\cos 5x - \frac{1}{7}\cos 7x + \ldots.$$

[1] *Théorie Analytique de la chaleur*, § 177.

e in questa forma la serie corrisponde al caso che l'origine cada nel punto di mezzo di una semi-onda positiva e che i valori della funzione siano $\pm \frac{\pi}{4}$; ma se si vuole, come innanzi è supposto, che l'origine cada nell'estremo sinistro di una semionda positiva e i valori della funzione siano ± 1, la serie prende la forma, con la quale viene più ordinariamente adoperata:

$$\text{Fal}\, x = \frac{4}{\pi} \left\{ \text{sen}\, x + \frac{1}{3} \text{sen}\, 3x + \frac{1}{5} \text{sen}\, 5x + \dots \right\}. \tag{2}$$

2. È da osservare che, partendo dall'integrale definito

$$\int_0^\infty \frac{\text{sen}\, x\alpha}{\alpha} d\alpha = \begin{cases} +\frac{\pi}{2} & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{»} \quad x = 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{»} \quad x < 0 \end{cases} \tag{3}$$

che era noto anche prima di FOURIER, e dal quale si deduce immediatamente la funzione sgn x, poichè è

$$\text{sgn}\, x = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{sen}\, x\alpha}{\alpha} d\alpha = \begin{cases} +1 & \text{per } x > 0 \\ 0 & \text{»} \quad x = 0 \\ -1 & \text{»} \quad x < 0 \end{cases} \tag{4}$$

è facile ottenere sotto forma di integrale definito anche il fattore alternante Fal x. Basta infatti nella (4) sostituire ad x una funzione periodica di x che assuma alternatamente valori positivi e negativi nelle successive semi-onde annullandosi negli estremi di esse. Ponendo ad esempio sen x in luogo di x nella (4) si ha

$$\text{Fal}\, x = \text{sgn sen}\, x = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\text{sen}\,(\alpha\, \text{sen}\, x)}{\alpha} d\alpha. \tag{5}$$

Riporto qui questa espressione di Fal x mediante quella equivalente sgn sen x, della quale ho già fatto uso in altri miei scritti [1] perchè non mi è noto che sia adoperata, quantunque da FOURIER [2] sia già stata rilevata la possibilità del passaggio inverso della serie (2) all'integrale (4).

[1] V. ad es. § 7 del mio scritto sulla rappresentazione delle funzioni periodiche poligonali nella « Elettrotecnica » n. 19-20-21, luglio 1924.

[2] *Théorie Analytique de la chaleur*, § 356.

3. Un'altra funzione poligonale periodica che al pari del fattore alternante prende alternativamente i valori $+1$ e -1 nelle successive semi-onde può facilmente ottenersi in forma finita servendosi della funzione Ix, intiero di x, di LEGENDRE, poichè si ha infatti

$$\varphi_\pi(+1, -1) = (-1)^{I\frac{x}{\pi}} = i^{2 I\frac{x}{\pi}} \tag{6}$$

e di questo metodo di rappresentazione mi sono ordinariamente servito nei precedenti miei scritti, adoperando anche la notazione $\varphi_\pi(+1, -1)$.

In certe mie ricerche poi, sono stato condotto ad una espressione della stessa funzione $\varphi_\pi(+1, -1)$ mediante l'indice di derivazione osservando che le successive derivate di $e^{-\alpha}$ sono $-e^{-\alpha}$, $e^{-\alpha}$, $-e^{-\alpha}$, ... cosicchè se si indica con $D_\alpha^{(n)}$ la derivata ennesima di $e^{-\alpha}$ rispetto ad α, risulta evidentemente

$$\varphi_\pi(+1, -1) = e^\alpha D_\alpha^{\left(I\frac{x}{\pi}\right)} e^{-\alpha} \tag{7}$$

dove ai valori negativi di $I\dfrac{x}{\pi}$ si deve intendere che corrispondono i successivi integrali di $e^{-\alpha}$, e che il campo di variazione di α sia compreso fra zero e $+\infty$.

4. Le funzioni (6) e (7), benchè quasi dappertutto uguali a quelle (2) e (5), pure ne differiscono per il fatto della mancanza dei punti isolati, agli estremi delle semionde, nei quali la funzione prende il valore zero, gl'intervalli nei quali il valore della funzione si mantiene costante essendo aperti ad entrambi gli estremi per le (2) e (5) e chiusi invece all'estremo sinistro per le (6) e (7).

La perfetta identità delle (2) e (5) con le (6) e (7) può però essere ottenuta completando queste ultime con l'aggiunta di una funzione, come ad esempio

$$\left\{-I\operatorname{sen}^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right\}^{I\frac{2x-\pi}{2\pi}} \quad \text{oppure} \quad \left\{-I\frac{I\frac{x}{\pi}}{\frac{x}{\pi}}\right\}^{I\frac{2x-\pi}{2\pi}} \tag{8}$$

la quale goda la proprietà di prendere il valore $+1$ negli estremi di ordine dispari delle semi-onde, il valore -1 negli estremi di ordine pari ed abbia il valore zero in ogni altro punto.

Come si scorge, le funzioni (8) sono formate, in modo analogo a $(-1)^n$, elevando alla potenza $\mathrm{I}\,\frac{2x-\pi}{2\pi}$, una funzione periodica puntiforme

$$\mathrm{I}\,\mathrm{sen}^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{oppure} \quad \mathrm{I}\left\{\left(\mathrm{I}\,\frac{x}{\pi}\right)\Big/\left(\frac{x}{\pi}\right)\right\} \tag{9}$$

presa col segno —, che è dappertutto zero ed ha il valore $+1$ nei punti di ascissa $x=\frac{\pi}{2}\pm k\pi$ con k intiero. In una mia recente Nota [1] ho già rilevato l'interesse che presentano le funzioni puntiformi periodiche del tipo delle (9) per la possibilità che esse danno di esprimere analiticamente grandezze fisiche che sono funzioni di variabili discontinue.

5. Poichè i punti nei quali differiscono le funzioni Fal x e $\varphi_\pi(+1,-1)$ costituiscono un insieme di misura nulla, le due funzioni hanno entrambe lo stesso integrale, il quale è una *poligonoide raddrizzata* [2] cosicchè si ha (5), (6)

$$\int \mathrm{sgn}\,\mathrm{sen}\,x\,dx = \int i^{2\mathrm{I}\frac{x}{\pi}}dx = \pi\,\mathrm{Plg}_R\left(\frac{x}{\pi}\right). \tag{10}$$

Se si vuole, si può esprimere la poligonoide raddrizzata con una serie trigonometrica e si ha così per l'integrale del fattore alternante [3]

$$\pi\,\mathrm{Plg}_R\left(\frac{x}{\pi}\right) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos x + \frac{\cos 3x}{3^2} + \frac{\cos 5x}{5^2} + \ldots\right). \tag{11}$$

È chiaro poi che gli integrali delle funzioni puntiformi (8) e (9) sono tutti identicamente nulli.

6. È opportuno osservare che la funzione a due valori innanzi menzionata $(-1)^n = i^{2n}$, con n numero intiero, della quale pure si fa tanto largamente uso, non solo non coincide col fattore alternante, come definito al § 1, ma non è neanche identica con le funzioni puntiformi (8), perchè mentre queste sono definite per tutti i valori reali della variabile x, essa invece non è definita che solo per i valori intieri di essa.

(1) « R. C. Acc. Naz. dei Lincei », 1 aprile 1928.

(2) Per la poligonoide raddrizzata veggasi la mia precedente nota in questo « Bollettino », anno VII, n. 5, dicembre 1928.

(3) V. H. Resal, *Traité de physique mathématique*. T. I., p. 85 (2.me Edition, 1887).

7. È notevole infine che il fattore alternante è suscettibile pure di una definizione geometrica elementare dalla quale apparisce che esso è una delle più semplici funzioni circolari, il cui diagramma è, per così dire, la traduzione grafica di una proposizione (21, III) di EUCLIDE « *Nel cerchio angoli inscritti nel medesimo arco sono uguali* » per il particolare caso in cui l'arco sia uguale a 180°.

Si consideri infatti in un cerchio, un diametro AB ed un punto C sulla circonferenza di esso, e sia φ il valore dell'arco AC contato nel senso positivo. Si uniscano con C i punti A e B; al valore α dell'angolo ACB che così si ottiene si attribuisca il segno $(+)$ se percorrendo il perimetro del triangolo ABC nel senso dell'ordine alfabetico delle lettere l'area da esso racchiusa resta a destra dell'osservatore, ed il segno $(-)$, se resta a sinistra.

Ciò posto è chiaro che la funzione $\alpha = f_\pi(\varphi)$ esprimente il valore dell'angolo α sotto il quale il diametro AB cioè l'arco π, è visto dal punto C, estremo dell'arco $AC = \varphi$, non è altro che il fattore alternante poichè, convenendo di porre $\alpha = 0$ per C coincidente con uno degli estremi A, B del diametro, risulta

$$\alpha = 0 \quad \text{per} \quad \varphi = 0 \qquad \alpha = 0 \quad \text{per} \quad \varphi = \pi$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} \quad \text{»} \quad 0 < \varphi < \pi \qquad \alpha = -\frac{\pi}{2} \quad \text{»} \quad \pi < \varphi < 2\pi$$

e così successivamente: α cioè resta costante mentre C percorre una semicirconferenza, cambia segno quando C percorre la semicirconferenza successiva e si annulla ogni volta che C passa per uno degli estremi A, B del diametro dato. La differenza col fattore alternante consiste solo in ciò che il valore costante invece di essere ± 1 è $\pm \frac{\pi}{2}$ e perciò si ha

$$f_\pi(\varphi) = \frac{\pi}{2} \operatorname{Fal} x. \tag{12}$$

8. Il fattore alternante ora defiuito è quello *simmetrico*. Se invece del diametro AB si considera una corda MN che separa la circonferenza in due archi ψ e $2\pi - \psi$ ed è P il punto mobile, conservando la stessa convenzione per i segni e per il valore dell'angolo quando il punto mobile passa per uno degli estremi della corda, si scorge che la funzione $\alpha = f_\psi(\varphi)$ prenderà per un intervallo ψ il valore $\frac{1}{2}(2\pi - \psi)$ e in un successivo intervallo $2\pi - \psi$ il valore $\frac{1}{2}\psi$ annullandosi nel passaggio da un intervallo all'altro. In altre parole il valore della funzione, in ciascuno dei due intervalli nei quali è diviso il periodo, è uguale alla metà dell'altro intervallo.

9. Dalla definizione data al § 7 del fattore alternante come funzione circolare segue con agevole estensione anche la definizione di esso come funzione sferica. Si immagini infatti di far rotare il circolo dato intorno al suo diametro perpendicolare a quello AB; esso genererà una sfera, i punti A, B un circolo massimo che si può assumere come equatore. L'angolo al vertice del cono che proietta l'equatore da un punto C della sfera è retto e corrisponde perciò ad un angolo solido $(2-\sqrt{2})\pi$. Convenendo di chiamare polo boreale quello che rimane a destra di un osservatore il quale percorre l'equatore nel senso positivo, e di dare agli angoli solidi dei coni lo stesso segno della latitudine del vertice, si vede che chiamando λ e ζ la latitudine e la longitudine, resta in tal modo definita una funzione sferica $\omega = f_{\sigma}(\lambda, \zeta)$ indicante l'angolo solido ω sotto il quale da un punto della sfera è visto il suo equatore, funzione che varia solo col segno della latitudine λ ed ha il valore costante $(2-\sqrt{2})\pi$ per tutti i punti dell'emisfero boreale $(\lambda > 0)$ il valore $-(2-\sqrt{2})\pi$ per tutti i punti dell'emisfero australe $(\lambda < 0)$ ed il valore zero per tutti i punti dell'equatore $(\lambda = 0)$.

Roma, 5 aprile 1929.

Errata-corrige. — Nella precedente Nota, « Bollettino », anno VII, n. 5, dicembre 1928, il fattore $I\nu!^{-1}$ che apparisce nelle formole (9), (10), (11) si legga $[I(\nu+1)!]^{-1}I(\nu+1)$. L. L.