
BOLLETTINO UNIONE MATEMATICA ITALIANA

LETTERIO TOSCANO

Una formula di Waring ed alcune identità trigonometriche

*Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie
1, Vol. 8 (1929), n.3, p. 142–147.*

Unione Matematica Italiana

<[http:
//www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_3_142_0](http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_3_142_0)>

L'utilizzo e la stampa di questo documento digitale è consentito liberamente per motivi di ricerca e studio. Non è consentito l'utilizzo dello stesso per motivi commerciali. Tutte le copie di questo documento devono riportare questo avvertimento.

*Articolo digitalizzato nel quadro del programma
bdim (Biblioteca Digitale Italiana di Matematica)
SIMAI & UMI*

<http://www.bdim.eu/>

Una formula di Waring ed alcune identità trigonometriche.

Nota di LETTERIO TOSCANO (a Messina).

Sunto. - In questa Nota si deducono alcune identità trigonometriche applicando una formula di WARING ed una identità trigonometrica del SIBIRANI.

§ 1. Il Prof. F. SIBIRANI ⁽¹⁾, considerando il determinante di VANDERMONDE formato con le successive potenze delle radici n^{esime} dell'unità, dimostra l'identità

$$(1) \quad \prod_{k=1}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{n} = \sqrt{\frac{n}{2^{n-1}}},$$

con $E\left(\frac{n-1}{2}\right)$ uguale al massimo intero contenuto in $\frac{n-1}{2}$.

(1) Cfr. « Bollettino Unione Matematica Italiana », anno VIII, 1929, n. 1, pp. 23-25: Sviluppo di alcuni determinanti ed una identità trigonometrica.

In questa Nota mi propongo di dedurre delle identità analoghe, sfruttando una formula di WARING e la precedente del Prof. SIBIRANI.

§ 2. Posto $u + v = x$, $uv = y$, $u^n + v^n = S_n$, con n intero e positivo, si ha la formula di WARING ⁽¹⁾:

$$S_n = x^n - \frac{n}{1} x^{n-2} y + \frac{n(n-3)}{2!} x^{n-4} y^2 - \frac{n(n-4)(n-5)}{3!} x^{n-6} y^3 + \\ + \dots + (-1)^r \frac{n(n-r+1)(n-r+2) \dots (n-2r+1)}{r!} x^{n-2r} y^r + \dots$$

Se $u = (a + bi)^{\frac{1}{n}}$, $v = (a - bi)^{\frac{1}{n}}$, $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, con $i = \sqrt{-1}$, segue $y = (a^2 + b^2)^{\frac{2}{n}} = \rho^{\frac{2}{n}}$, $S_n = 2a$ e la formula di WARING diventa

$$x^n - \frac{n}{1} \rho^{\frac{2}{n}} x^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2!} \rho^{\frac{4}{n}} x^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{3!} \rho^{\frac{6}{n}} x^{n-6} + \dots - 2a = 0.$$

Quest'ultima relazione è stata considerata come equazione algebrica ⁽²⁾, di grado n in x ; e si è dimostrato che le sue radici sono reali e date dalla formula risolutiva

$$x = 2\rho^{\frac{1}{n}} \cos \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right)$$

per $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$; essendo inoltre

$$a = \rho \cos \varphi, \quad b = \rho \sin \varphi.$$

Per $n = 3$ si ha l'equazione

$$x^3 - 3\rho^{\frac{2}{3}} x - 2a = 0;$$

e ponendo $-3\rho^{\frac{2}{3}} = p$, $-2a = q$, otteniamo la formula di CARDANO per l'equazione cubica.

Formule analoghe si possono dedurre per $n = 5, 7, \dots$.

⁽¹⁾ Cfr. G. CANDIDO, *Le Identità razionali*, « La Matematica Elementare », Anno I, 1922, n. 2, 3, pp. 25-39.

⁽²⁾ Cfr. G. CANDIDO, *Su d'una equazione algebrica*, « Giornale di Matematiche », vol. 39, 1901, pp. 103-107.

In tema di identità, se poniamo

$$\varphi = 0, \quad \rho = \frac{1}{2^n},$$

si perviene all'equazione

$$2^n x^n - \frac{n}{1} 2^{n-2} x^{n-2} + \frac{n(n-3)}{2!} 2^{n-4} x^{n-4} + \dots = 2$$

che ammette le radici

$$x = \cos \frac{2k\pi}{n}$$

per $k = 0, 1, \dots, (n-1)$.

Inoltre l'equazione ⁽¹⁾

$$(x + \sqrt{x^2 - 1})^n + (x - \sqrt{x^2 - 1})^n = 2$$

ammette pure le radici

$$x = \cos \frac{2k\pi}{n}$$

per $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$; sviluppando il suo primo membro e applicando il principio d'identità dei polinomi, ricaviamo le relazioni combinatorie ⁽²⁾

$$\binom{n}{2} + \binom{2}{1} \binom{n}{4} + \binom{3}{2} \binom{n}{6} + \dots + \binom{\mu}{1} \binom{n}{2\mu} = 2^{n-3} \cdot n$$

$$\binom{n}{4} + \binom{3}{1} \binom{n}{6} + \binom{4}{2} \binom{n}{8} + \dots + \binom{\mu}{2} \binom{n}{2\mu} = 2^{n-5} \frac{n(n-3)}{2!}$$

$$\begin{aligned} \binom{n}{2r} + \binom{r+1}{1} \binom{n}{2r+2} + \binom{r+2}{2} \binom{n}{2r+4} + \dots + \binom{\mu}{r} \binom{n}{2\mu} = \\ = 2^{n-2r-1} \cdot \frac{n}{r} \binom{n-r-1}{r-1}. \end{aligned}$$

con $\mu = E\left(\frac{n}{2}\right)$.

§ 3. Ritorniamo ora alla generica equazione di WARING e consideriamo il prodotto delle sue radici.

⁽¹⁾ Cfr. F. GIUDICE, *Sulle sezioni angolari*, « Supplemento al Periodico di Matematica », anno XVI, fasc. IX, 1913, pp. 129-131.

⁽²⁾ Cfr. NOVI, *Analisi Algebrica*, parte prima, 1863.

Si ha

$$x_0 x_1 \dots x_{n-1} = 2^n \rho \cos \frac{\varphi}{n} \cos \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \right) \cos \left(\frac{\varphi}{n} + 2 \frac{2\pi}{n} \right) \dots \\ \dots \cos \left(\frac{\varphi}{n} + 2 \frac{(n-1)\pi}{n} \right);$$

e poichè d'altra parte tale prodotto vale

$$(-1)^n (-2a) = (-1)^{n+1} 2\rho \cos \varphi,$$

concludiamo che

$$\cos \frac{\varphi}{n} \cos \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \right) \cos \left(\frac{\varphi}{n} + 2 \frac{2\pi}{n} \right) \dots \cos \left(\frac{\varphi}{n} + 2 \frac{(n-1)\pi}{n} \right) = \\ = (-1)^{n+1} 2^{1-n} \cos \varphi.$$

Per $\varphi = 0$ e per n dispari si deduce

$$\prod_{k=1}^{k=n-1} \cos \frac{2k\pi}{n} = 2^{1-n}$$

ovvero

$$(2) \quad \prod_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} \cos \frac{2k\pi}{n} = \sqrt{2^{1-n}}.$$

Supposto ora $\frac{\varphi}{n} = \frac{\pi}{2}$, con n dispari, si ha

$$x_k = 2\rho^{\frac{1}{n}} \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2k\pi}{n} \right) = -2\rho^{\frac{1}{n}} \sin \frac{2k\pi}{n}$$

ed

$$a = \rho \cos \varphi = \rho \cos n \frac{\pi}{2} = 0.$$

L'equazione di WARING ammette così la radice $x_0 = 0$ e si abbassa al grado $n-1$.

Per il prodotto delle $n-1$ radici relative si ha

$$x_1 x_2 \dots x_{n-1} = (-1)^{n-1} 2^{n-1} \rho^{\frac{n-1}{n}} \prod_{k=1}^{k=n-1} \sin \frac{2k\pi}{n}.$$

D'altra parte questo prodotto è dato da

$$(-1)^{\frac{(n-1)^2}{2}} \frac{n(n-1)(n-3) \dots 2}{2^{\frac{n-5}{2}} \left(\frac{n-1}{2} \right)!} \rho^{\frac{n-1}{n}}$$

e quindi uguagliando:

$$\prod_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{n(n-1)(n-3) \dots 2}{2^{\frac{3n-7}{2}} \left(\frac{n-1}{2}\right)!}.$$

Intanto

$$\prod_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} = (-1)^{\frac{n-1}{2}} \left[\prod_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} \right]^2$$

e quindi la precedente diventa

$$(3) \quad \prod_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} = \sqrt{\frac{n(n-1)(n-3) \dots 2}{2^{\frac{3n-7}{2}} \left(\frac{n-1}{2}\right)!}}.$$

Ora, dalla identità

$$\operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n} = 2 \operatorname{sen} \frac{k\pi}{n} \cos \frac{k\pi}{n},$$

sempre per n dispari, si ha

$$\cos \frac{k\pi}{n} = \frac{1}{2} \frac{\operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}}{\operatorname{sen} \frac{k\pi}{n}}$$

e quindi

$$\prod_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} \cos \frac{k\pi}{n} = \frac{1}{2^{\frac{n-1}{2}}} \frac{\prod_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} \operatorname{sen} \frac{2k\pi}{n}}{\prod_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} \operatorname{sen} \frac{k\pi}{n}},$$

da cui

$$(4) \quad \prod_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} \cos \frac{k\pi}{n} = \sqrt{\frac{(n-1)(n-3) \dots 2}{2^{\frac{3n-7}{2}} \left(\frac{n-1}{2}\right)!}}$$

E facilmente, sempre per n dispari, si dedurrebbero le altre identità

$$\prod_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} \operatorname{tg} \frac{k\pi}{n} = \sqrt{\frac{2^{\frac{n-5}{2}} \cdot n \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{(n-1)(n-3) \dots 2}}$$

$$\prod_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} \operatorname{tg} \frac{2k\pi}{n} = \sqrt{\frac{n(n-1)(n-3) \dots 2}{2^{\frac{n-5}{2}} \left(\frac{n-1}{2}\right)!}}$$

$$\prod_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{k\pi}{n}\right) = \frac{2^{n-3} \cdot \left(\frac{n-1}{2}\right)!}{(n-1)(n-3) \dots 2}$$

$$\prod_{k=1}^{k=\frac{n-1}{2}} \left(\operatorname{ctg}^2 \frac{k\pi}{n} - 1\right) = \frac{1}{n} \sqrt{2^{n-1}}.$$

Messina, aprile 1929 (VII).