Bollettino Unione Matematica Italiana

Beniamino Segre

Intorno alle congruenze di rette che ammettono reti coniugate ad invarianti uguali

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (1929), n.5, p. 242–245.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_5_242_0>

Intorno alle congruenze di rette che ammettono reti coniugate ad invarianti uguali.

Nota di BENIAMINO SEGRE (a Roma) (*).

Sunto. - *L'A. dà notizia delle sue ricerche sulle particolari congruenze di rette che godono della proprietà indicata nel titolo, ed accenna ad alcune applicazioni alla Geometria proiettivo-differenziale dello spazio ordinario ed alla Teoria delle equazioni differenziali.*

1. Fra le infinite reti coniugate ad una data congruenza di rette, non ve n'è generalmente alcuna che sia *ad invarianti uguali*: però quando esiste una rete siffatta, in base ad un classico teorema di KOENIGS se ne ha subito un'altra, prendendo su ogni raggio della congruenza il coniugato armonico rispetto ai due fuochi del punto d'appoggio della prima rete. In un lavoro di prossima pubblicazione, io mi occupo di quelle congruenze che ammettono coppie di reti coniugate ad invarianti uguali così situate; e, dopo aver *determinate* tali congruenze (le quali dipendono da una funzione arbitraria di due argomenti), le *classifico* distinguendole in vari tipi in relazione al numero delle reti coniugate ad invarianti uguali, *caratterizzo* le congruenze delle singole categorie mediante relazioni differenziali fra gli invarianti delle loro reti focali, ed infine mostro come in ogni caso la determinazione delle reti coniugate ad invarianti uguali *si effettui con sole quadrature.*

2. Tutti questi risultati possono trovare un'applicazione nella *Geometria proiettivo-differenziale* dello spazio ordinario, utilizzando il fecondo metodo iperspaziale di BOMPIANI e THOMSEN, che conduce a rappresentare il complesso delle tangenti di una superficie di S_3 colla V_3 costituita dalle rette di una congruenza quadratica di S_5. Basta invero osservare che in tal guisa, alle *superficie R*, che tanta importanza hanno nella teoria della deformazione proiettiva, vengono a corrispondere in S_5 congruenze quadratiche *della specie suddetta!*

Mi permetto altresì di far rilevare il *lato analitico* delle ricerche a cui ho poc'anzi accennato. Esse posson anche venir interpretate in relazione alle equazioni delle reti focali delle con-

(*) Comunicazione tenuta al Congresso di Firenze (1929) della Società Italiana per il Progresso delle Scienze.

gruenze in questione; e la teoria di queste particolari equazioni di LAPLACE, è intimamente collegata con quella della trasformazione di MOUTARD per le equazioni di LAPLACE ad invarianti uguali.

Qui darò solo alcune proposizioni relative all'integrazione di certe equazioni differenziali, parendomi ch'esse possano avere qualche interesse, indipendentemente dalle applicazioni geometriche da cui hanno avuto origine.

3. Se si conosce un integrale (non identicamente nullo), $y = \varkappa(x)$, dell'equazione differenziale

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f(x)\cdot y + \frac{c}{y^3} = 0,$$

in cui alla costante c si attribuisca un valore particolare $\bar{c}$ qualunque (p. es. $\bar{c} = 0$), *l'integrale generale si determina con sole quadrature, mediante la formula*

$$\int_0^{\left[\frac{y}{\varkappa(x)}\right]^2} \frac{dy}{\sqrt{\bar{c}y^2 + ay + c}} = 2\int_0^x \frac{dx}{[\varkappa(x)]^2} + b,$$

in cui figurano le due costanti arbitrarie a *e* b.

4. Consideriamo l'equazione di LAPLACE ad invarianti uguali:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{k}{(u-v)^2}\left\{ k + \frac{auv + b(u+v) + c}{\sqrt{au^2 + 2bu + c}\sqrt{av^2 + 2bv + c}} \right\}\cdot z = 0:$$

essa come caso particolare, per $b^2 - ac = 0$, si riduce alla nota equazione di EULERO. *L'integrale generale di detta equazione differenziale, si esprime colla*

$$z = x\sqrt{au^2 + 2bu + c} - y\sqrt{av^2 + 2bv + c},$$

ove x *e* y *si calcolano per mezzo delle*

$$x = (v-u)^k \int_u^v f(t)(t-u)^{-k-1}(v-t)^{-k}dt + (v-u)^{-k}\int_u^v F(t)(t-u)^{k-1}(v-t)^k dt$$

$$y = -(v-u)^k \int_u^v f(t)(t-u)^{-k}(v-t)^{-k-1}dt + (v-u)^{-k}\int_u^v F(t)(t-u)^k(v-t)^{k-1}dt.$$

In queste formule compaiono *due funzioni arbitrarie* f(t) *ed* F(t); determinata mediante una di esse la x o la y, si può dedurne l'altra senza dover eseguire nuove quadrature, osservando che risulta

$$y = \frac{1}{k}(v - u)\frac{\partial x}{\partial v}, \quad x = \frac{1}{k}(u - v)\frac{\partial y}{\partial u}.$$

5. Ed ecco per ultimo l'integrale generale dell'*equazione differenziale alle variabili miste*:

$$[\mu(u) - \nu(v)][\varphi(u) - \psi(v)] = [\varphi'(u)\mu(u) - \psi'(v)\nu(v)](u - v),$$

che è già stata incontrata da FUBINI e CECH nel problema della determinazione delle superficie R deformabili in ∞^3 modi.

Esclusa la soluzione che si ha prendendo $\mu(u)$ *e* $\nu(v)$ *arbitrariamente, e ponendo*

$$\varphi(u) = au + b, \quad \psi(v) = av + b,$$

ogni altra soluzione della suddetta equazione è compresa nelle formule

$$\begin{aligned} \mu(u) &= \sqrt{au^2 + bu + c} & \varphi(u) &= \quad d\sqrt{au^2 + bu + c} + eu + f \\ \nu(v) &= \sqrt{av^2 + bv + c} & \psi(v) &= -d\sqrt{av^2 + bv + c} + ev + f, \end{aligned}$$

oppure nelle

$$\begin{aligned} \mu(u) &= \quad au + b & \varphi(u) &= \frac{cu^2 + du + e}{au + b} \\ \nu(v) &= -av - b & \psi(v) &= \frac{cv^2 + dv + e}{av + b}, \end{aligned}$$

contenenti rispettivamente 6 e 5 costanti arbitrarie.

Sulle equazioni differenziali autoaggiunte del 4° e 5° ordine.

Nota di BENIAMINO SEGRE (a Roma).

Sunto. - *L'A. fa alcune osservazioni su d'una Nota di* G. MAMMANA.

In una Nota pubblicata recentemente in questo « Bollettino » (1), G. MAMMANA ha dimostrato la possibilità di ricondurre l'integra-

(1) G. MAMMANA, *Sull'integrazione dell'equazione lineare omogenea del quinto ordine autoaggiunta*, questo « Bollettino », fasc. 15 ottobre 1929, p. 180.

zione di un' equazione differenziale lineare omogenea del 5° ordine autoaggiunta, a quella di un' equazione dello stesso tipo del 4° ordine. Orbene, in un lavoro anteriore [1] io ho già (per quanto incidentalmente) segnalato in modo esplicito l' *equivalenza* dei due problemi d'integrare un'equazione autoaggiunta del 4° o del 5° ordine; ed anzi, il processo sintetico da me indicato, oltre a porgere l' interpretazione geometrica degli sviluppi analitici del MAMMANA, mostra ch' essi non posson estendersi ad equazioni autoaggiunte d' ordine superiore.

Aggiungo che il risultato conseguito con calcoli non troppo agevoli verso la fine della Nota citata in [1], è pressocchè evidente per via geometrica, e può viemmeglio venir precisato dicendo che:

Date in uno stesso intervallo 4 funzioni derivabili

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad x_3 = x_3(t), \quad x_4 = x_4(t), \tag{1}$$

fra i sei minori del 2° ordine estratti dalla loro matrice wronskiana

$$\begin{Vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) & x_4(t) \\ x'_1(t) & x'_2(t) & x'_3(t) & x'_4(t) \end{Vmatrix} \tag{2}$$

intercede più di una relazione lineare omogenea a coefficienti costanti, allora e solo allora che delle funzioni (1) *assegnate al più due sieno linearmente indipendenti; ed in tal caso i minori suddetti (se non sono tutti nulli) si posson ottenere moltiplicando uno non nullo di essi per delle costanti.*

Per stabilire questa proposizione, basta interpretare le (1) come le equazioni di una curva C di S_3 (eventualmente ridotta ad un sol punto) in coordinate proiettive omogenee (x_1, x_2, x_3, x_4). I minori estratti dalla (2) son le coordinate plueckeriane delle rette tangenti di C; e se tali minori son vincolati da due distinti legami lineari, le tangenti di C appartengono ad una congruenza lineare, onde ovviamente C non può che ridursi ad *una retta* di questa congruenza (o ad un punto).

Roma, 31 ottobre 1929.

[1] B. SEGRE, *Sulle curve algebriche le cui tangenti appartengono al massimo numero di complessi lineari indipendenti*, « Mem. R. Accad. dei Lincei », serie VI, t. 2 (1928), nota [2] a pag. 589.