BOLLETTINO
UNIONE MATEMATICA
ITALIANA

FRANCESCA HELG

Sulle equazioni di Laplace

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1,
Vol. **8** (1929), n.5, p. 249–253.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_5_249_0>

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Unione Matematica Italiana, 1929.

Sulle equazioni di Laplace.

Nota di FRANCESCA HELG (a Palermo).

Sunto. - *Si studiano tutti i casi in cui la successione di* LAPLACE *relativa ad una equazione lineare, non è distinta dalla successione relativa alla equazione aggiunta. Si ritrovano in modo semplice alcuni teoremi noti e si aggiungono osservazioni ed esempi nuovi.*

1. Sia E_0 l'equazione

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + a\frac{\partial z}{\partial u} + b\frac{\partial z}{\partial v} + cz = 0,$$

della quale denotiamo, usando le notazioni del DARBOUX, con h_0, h_{-1} i due invarianti. Denotiamo poi con E_0' la equazione aggiunta di E_0 (gli invarianti della quale sono h_{-1}, h_0) e consideriamo le due successioni di LAPLACE

$$\ldots.\ E_{-2},\ E_{-1},\ E_0,\ E_1,\ E_2, \ldots.$$
$$\ldots.\ E'_{-2},\ E'_{-1},\ E'_0,\ E'_1,\ E'_2, \ldots.$$

in ciascuna delle quali ogni equazione è la contigua a déstra o a sinistra, secondo la trasformazione di LAPLACE, della precedente o della seguente ordinatamente. Se h_i, h_{i-1} sono gli invarianti della equazione E_i, quelli di E'_{-i} sono h_{i-1}, h_i [1] e quindi l'equazione aggiunta di E_i è equivalente ad E'_{-i}.

Denotando con (Σ) e (Σ') ordinatamente le due successioni precedenti, diremo, brevemente, che ciascuna di queste successioni è l'aggiunta dell'altra.

Se E_0 è ad invarianti uguali, le due successioni (Σ) e (Σ') non sono distinte. Noi ci proponiamo di esaminare tutti i casi in cui si verifica quest'ultima circostanza; e mentre ritroveremo così, in modo semplice, qualche teorema già noto, avremo occasione di aggiungere qualche osservazione non priva di interesse.

2. Affinchè (Σ) e (Σ') coincidano, occorre e basta che esse abbiano una equazione in comune, vale a dire che una equazione E_i di (Σ) sia equivalente ad una equazione E'_{i+s} di (Σ'). Esprimiamo questo fatto scrivendo

$$E_i \equiv E'_{i+s},$$

(1) Cfr. G. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. II, 2° édition, 1915, pag. 107 (Paris, Gauthier-Villars).

e questa relazione, qualunque sia l'intero k, implica l'altra

$$E_{i+k} \equiv E'_{i+s+k}.$$

Per $k = -i$, si ha

$$E_0 \equiv E'_s.$$

Ora, se s è pari, cioè

$$s = 2n,$$

da questa segue

(1) $$E_{-n} \equiv E'_n;$$

mentre se s è dispari, cioè

$$s = 2n + 1,$$

si deduce

(2) $$E_{-n} \equiv E'_{n+1}.$$

Poichè l'aggiunta di E_i è equivalente ad E'_{-i}, la (1) e la (2) esprimono che o l'equazione E_{-n} ha gli invarianti uguali (essendo equivalente alla sua aggiunta), ovvero esistono in (Σ) due equazioni contigue E_{-n-1}, E_{-n} ciascuna equivalente alla aggiunta dell'altra.

Avremo così la seguente proprietà.

Se una successione di Laplace non è distinta dalla sua aggiunta, essa contiene una equazione ad invarianti uguali, ovvero contiene due equazioni contigue ciascuna aggiunta dell'altra.

Noi vogliamo esaminare particolarmente questi due casi.

3. Supponiamo dapprima che in (Σ) vi sia una equazione ad invarianti uguali. Senza restrizione può supporsi che questa sia E_0.

In questo caso due equazioni E_i, E_{-i} di (Σ), ad indici opposti, hanno i medesimi invarianti, scambiati di posto, cioè ciascuna è equivalente all'aggiunta dell'altra.

Allora non può presentarsi che una delle seguenti circostanze.

a) *La successione* (Σ) *è chiusa da una parte.* — È il caso ben noto esaminato da Darboux. Allora (Σ) è chiusa pure dall'altra parte e l'integrale generale di E_0 è del medesimo rango rispetto alle variabili u, v [1].

b) *La successione* (Σ) *è periodica.* — Allora in (Σ) esistono quante si vogliano equazioni ad invarianti uguali (almeno quelle equivalenti ad E_0).

Denotiamo con E_i la prima equazione ad invarianti uguali e successiva ad E_0 ($i > 0$).

Il numero i deve essere un numero dispari. Difatti se i fosse pari, cioè

$$i = 2i',$$

[1] Cfr. loc. cit. [1], t. II, pag. 150.

secondo l'osservazione fatta al n.° 2, l'equazione $E_{i'}$ avrebbe già gli invarianti uguali, ciò che è assurdo essendo $i' < i$, dunque i è dispari.

Allora se E_i è distinta da E_0 (cioè ha gli invarianti diversi da quelli di E_0) è chiaro che avendosi

$$E_{-i} \equiv E_i$$

la successione ammette il periodo di $2i$ termini e, oltre E_0 ed E_i, essa non contiene equazioni ad invarianti uguali, non equivalente ad una di queste.

Viceversa, se una successione di LAPLACE (Σ) contiene due equazioni E_0, E_i, ad invarianti uguali, distinte, è chiaro che la successione è periodica. Ne risulta intanto il teorema di BOMPIANI [1].

Se invece la prima equazione E_i ad invarianti uguali, successiva ad E_0, non è distinta da E_0, allora la successione (Σ) ha il periodo di i termini. Ne segue (cfr. n.° 2) che posto

$$i = 2i' + 1$$

le equazioni contigue $E_{i'}$, $E_{i'+1}$ sono ciascuna equivalente alla aggiunta dell'altra: la successione (Σ) è allora del tipo che esamineremo al n.° seguente.

c) *La successione* (Σ) *è aperiodica.* — Essa allora non contiene, oltre E_0, alcuna equazione ad invarianti uguali.

4. Supponiamo adesso che (Σ) contenga due equazioni contigue ciascuna equivalente alla aggiunta dell'altra.

Senza ledere la generalità possiamo supporre che queste siano E_0 ed E_1.

In questo caso l'aggiunta di una equazione E_i qualsivoglia è equivalente alla equazione E_{-i+1}.

Nelle ipotesi ora fatte si presenterà uno dei seguenti casi.

a) *La successione* (Σ) *è chiusa da una parte.* — Allora, chiaramente, essa è chiusa anche dall'altra, e se E_n chiude (Σ) a destra, E_{-n+1} la chiude a sinistra.

b) *La successione* (Σ) *è periodica.* — In tale ipotesi (Σ) o non contiene alcuna equazione ad invarianti uguali o, se ne contiene, esse non sono distinte.

Nel 1° caso il periodo è formato da un numero dispari di termini, per esempio $2i + 1$, e le equazioni E_i, E_{i+1} costituiscono

[1] Cfr. « Comptes Rendus », t. 160, p. 551, 1915. Il prof. BOMPIANI mi avverte che va soppresso l'enunciato che chiude il n. 1 della sua nota.

un'altra coppia di equazioni, aggiunte l'una dell'altra, e distinta dalla prima.

Nel 2° caso, invece, il periodo sarà dato da un numero pari, $2i$, e la equazione E_i avrà gli invarianti uguali: si rientra cioè nel caso b) del n.° 3.

c) *La successione* (Σ) *è aperiodica*. — In tal caso, (Σ) non può contenere alcuna equazione ad invarianti uguali.

5. Addurremo ora qualche esempio.

Per il caso a) esaminato al n.° 3, rimandiamo agli esempi del DARBOUX.

Per il caso b) dello stesso n.° 3 sono noti gli esempi costruiti dal BOMPIANI [1] per le successioni (Σ) con due equazioni distinte ad invarianti uguali.

Se, invece, (Σ) deve avere una sola equazione ad invarianti uguali, si rientra, come si è osservato, in uno dei casi esaminati al n.° 4 per i quali costruiremo ora degli esempi.

Per il caso c), poi, del n.° 3 basta considerare l'equazione i cui invarianti sono dati da

$$h_0 = h_{-1} = u + v.$$

Calcolando i successivi invarianti si osserva che questi sono delle funzioni razionali fratte che, poste sotto forma irriducibile, hanno denominatori con un numero di zeri distinti, sempre crescente: non potendo così riprodursi gli invarianti, la successione (Σ) è certamente aperiodica.

Per il caso a) del n.° 4, posto

$$h_0 = e^{2\theta},$$

se vogliamo che l'equazione E_0 abbia per aggiunta E_1, deve essere verificata la relazione

$$h_{-1} = h_1 = e^{2\theta} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v}.$$

L'esempio più semplice, in queste ipotesi, di successioni chiuse da una parte, si ha per θ soluzione dell'equazione

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v} = e^{2\theta}.$$

Per il caso b), fatte le stesse posizioni del caso precedente, cioè

$$h_0 = e^{2\theta}$$

$$h_{-1} = h_1 = e^{2\theta} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial u \partial v}.$$

(1) Cfr. loc. cit. (1).

basta scegliere θ soluzione dell'equazione

$$\theta + \log\left(e^{2\theta} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v}\right) = \varphi(u) + \psi(v)$$

con φ e ψ funzioni arbitrarie.

Infine, per il caso c) del n.° 4 si considera l'equazione per cui gli invarianti sono dati da

$$h_0 = u + v$$

$$h_1 = u + v - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v}\log(u + v) = \frac{2(u + v)^3 + 1}{2(u + v)^2}.$$

Analogamente a ciò che si è detto nell'esempio relativo al caso c) del n.° 3, calcolando i successivi invarianti, si vede che essi sono delle funzioni razionali fratte che, poste sotto forma irriducibiie, hanno i denominatori con un numero di zeri distinti sempre crescente, e quindi la successione è aperiodica.