Sunti di lavori esteri

* Lavori di: M. Biernacki, D. V. Jonesco, V. Bernstein, S. Bernstein, R. Gosse, W. Gontcharoff, J. Herbrand, A. Tartakowsky, P. Alexandroff, R. Raclis, N. Bary, D. Pompeiu, E. Borel, S. Mandelbrojt, E. Goursat, Rèmes, G. Rempp, J. Popken, E. Cartan, S. Piccarti e D. Mirimanoff, J. V. Neumann, B. de Kerékjàrtó, L. Pomey, D. Th. Egoroff, A. Rosenblatt, M. Biernacki, V. A. Kostitzin, R. Salem, A. Ghika, R. Tambs Lyche, G. Valiron, B. de Kerékjàrtó, A. Haar, J. Hadamard, De Possel, H. L. Selber, R. Tambs Lyche, E. Cartan, S. Minetti, A. Froda, S. Saks, E. Slutsky, S. Minetti, Krawtchouk, C. Lurquin, M. Biernacki, G. Giraud, J. Chokhate, D. Menchoff, G. Bouligand, O. D. Kellog, S. Bernstein, A. Buhl

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **8** (1929), n.5, p. 266–275.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1929_1_8_5_266_0>

SUNTI DI LAVORI ESTERI

Recensioni delle Note di *Analisi* pubblicate nei « Comptes Rendus de l'Académie des Sciences » di Parigi, T. 186 (1° semestre 1928). (*Continuazione*, v. num. prec.).

M. Biernacki (Ibid., pagg. 1260 e 1410).

L'A. considera le rette uscenti dall'origine tali che in un angolo arbitrariamente piccolo la equazione $f(z) : \varphi(z)$ prenda una infinità di radici qualunque sia $\varphi(z)$, essendo $f(z)$ una funzione intera, e dà numerose proprietà.

Nella seconda Nota completa una dimostrazione della prima considerando il caso che $f(z)$ sia d'ordine finito positivo, anzichè d'ordine ∞ come nella Nota precedente.

D. V. Jonesco (Ibid., pag. 1262).

Dà dei teoremi di esistenza degli integrali dei sistemi di equazioni differenziali.

V. Bernstein (Ibid., pag. 1264).

Dà due formule che precisano i risultati di F. e R. Nevanlinna sulla convergenza di una funzione $f(z)$ meromorfa in un settore.

S. Bernstein (Ibid., pag. 1266).

Introduce la nozione di tipo di una funzione $f(x)$ regolarmente monotona, e dà delle interessanti proprietà sui tipi di queste funzioni.

R. Gosse (Ibid., pag. 1269).

Generalizza alcuni suoi risultati anteriori e indica come si possano formare delle condizioni necessarie e sufficienti perchè una equazione

$$s = f(x, y, z, p, q)$$

ammette un invariante per ciascun sistema di caratteristiche.

W. Gontcharoff (Ibid., pag. 1271).

Trova certe relazioni che esistono tra la natura analitica d'una funzione indefinitamente derivabile $f(x)$ d'una variabile complessa o reale, e la distribuzione degli zero delle derivate successive.

J. Herbrand (Ibid., pag. 1274).

Studia la teoria della deduzione matematica mediante i simboli e regole d'identità logiche, ponendo i suoi studi in relazione con quelli di Russel e Whitehead.

A. Tartakowsky (Ibid., pagg. 1337, 1401 e 1684).

Smith e Minkowsky hanno studiato la rappresentazione dei numeri con forme quadratiche ad $s \geq 3$ variabili: l'A. nella prima Nota dà l'espressione per il numero delle rappresentazioni di un numero mediante una forma quadratica positiva a più di tre variabili. Nella seconda Nota studia la totalità dei numeri rappresentabili mediante una forma quadratica positiva a più di quattro variabili. Nella terza Nota prosegue la seconda e caratterizza il caso che questi interi formino un numero finito di progressioni.

P. Alexandroff (Ibid., pagg. 1340 e 1696).

Nella prima Nota caratterizza l'omeomorfia tra due insiemi chiusi qualunque con proprietà combinatorie di certe successioni di poliedri che si possono porre in corrispondenza ad ogni insieme chiuso. Nella seconda Nota enuncia una serie di risultati sull'invarianza topologica delle frontiere regolari.

R. Raclis (Ibid., pag. 1347).

Stabilisce un teorema d'esistenza per l'equazione integrale di Fredholm di prima specie, il cui nucleo possiede delle linee di discontinuità.

N. Bary (Ibid., pag. 1414).

Dà un interessantissimo teorema: « Ogni funzione continua di una variabile reale è la somma di tre funzioni assolutamente continue di funzioni assolutamense continue »: studia alcune conseguenze di questo teorema e stabilisce il rango di una funzione continua.

D. POMPEIU (Ibid., pag. 1417).

Pone in relazione un suo studio (¹) con una Memoria di P. LÉVY, e trova l'analogia tra la sommazione di una serie divergente e l'attribuzione in un punto singolare d'un valore limite delle funzioni che possono essere considerate come funzioni derivate.

E. BOREL (Ibid., pag. 1389).

La densità media dei numeri primi compresi fra 10^8 e $10^8 + 5 \cdot (10)^4$ è di 5.41 $^0/_0$. L'Autore calcola la ripartizione teorica dei numeri primi in questo intervallo e pone in evidenza varie questioni interessanti da risolvere.

S. MANDELBROJT (Ibid., pagg. 1418 e 1592).

Considera una famiglia di coppie di funzioni $f(x) = \Sigma a_n x^n$ e $\varphi(x) = \Sigma b_n x^n$, olomorfe per $|x| < 1$ insieme con $\Sigma a_n b_n x^n$, e stabilisce le proprietà di questa composizione mediante la teoria delle funzioni normali.

Nella seconda Nota fa delle considerazioni alla Nota precedente.

E. GOURSAT (Ibid., pag. 1469).

Estende il legame tra la teoria delle equazioni alle derivate parziali del primo ordine a due variabili indipendenti e quella della teoria di MONGE, a due funzioni incognite di una variabile, al caso di $n+2$ variabili.

RÉMES (Ibid., pag. 1510).

Studia le soluzioni delle equazioni differenziali considerate in funzione del punto iniziale.

G. REMPP (Ibid., pag. 1503).

Mostra che i risultati ottenuti da L. BESSON, sulla probabilità di certe grandezze in meteorologia, si applicano rigorosamente in ogni caso facendo alcune ipotesi.

J. POPKEN (Ibid., pag. 1505).

Fà alcune interessanti osservazioni sulla natura aritmetica del numero e; pone in relazione i suoi risultati con quelli di BOREL (²).

(¹) « Enseignement Math. », 1906, p. 203; « Bull. Soc. Math. de France », (1926), p. 5.

(²) « Comptes Rendus », T. 128 (1899), p. 596.

E. Cartan (Ibid., pagg. 1594 e 1817).

Utilizzando un teorema di H. Weyl mostra nella prima Nota come si può determinare un sistema ortogonale completo di funzioni di certi spazi di Riemann.

Nella seconda Nota estende la prima Nota agli spazi di Riemann a metrica ovunque regolare aventi un gruppo transitivo di spostamenti.

S. Piccard e D. Mirimanoff (Ibid., pag. 1687).

Gli Autori studiano le curve

$$y = \frac{s\,!}{\Gamma(x+1)\Gamma(s-x+1)}\, p^x q^{s-x},$$

p e q essendo numeri positivi tali che $p+q=1$, ed s un numero intero positivo o nullo e studiano i coefficienti degli sviluppi in serie.

J. V. Neumann (Ibid., pag. 1689).

Indica un teorema che risolve il problema del gioco di due persone, posto recentemente da Borel [1].

B. de Kerékjártó (Ibid., pag. 1699).

Dà una dimostrazione elementare di un teorema di Brouwer [2] secondo il quale in una trasformazione biunivoca e bicontinua del piano senza punti invarianti e conservante il senso di orientazione, per ciascun punto del piano, si può costruire un campo non avente alcun punto comune con la sua immagine.

L. Pomey (Ibid., pag. 1701).

Tratta dei campi di esistenza delle soluzioni delle equazioni differenziali ed integrali, e pone in evidenza l'importanza che presenta in questo studio l'ordine delle derivate o degli integrali che figurano nelle equazioni.

D. Th. Egoroff (Ibid., pag. 1703).

Studia i nuclei sommabili ed a quadrato sommabili delle equazioni integrali a limiti fissi in relazione alle funzioni fondamentali.

(1) *Elements du calcul des probabilités.* (Hermann, 1924, 3e éd.); « Comptes Rendus », T. 184 (1927), p. 52.

(2) « Math. Annalen », 72 (1912), p. 37-54.

A. ROSENBLATT (Ibid., pag. 1797).

Generalizza i suoi risultati anteriori [1] sull'unicità delle soluzioni di $y' = f(x, y)$, nulle all'origine, nel caso che

$$\frac{f(x, y_2) - f(x, y_1)}{y_2 - y_1} \leq \frac{k}{|x_1|}, \qquad (k < 1).$$

M. BIERNACKI (Ibid., pag. 1799).

Riprende alcuni lavori di MANDELBROJT sulle successioni di funzioni olomorfe [2].

V. A. KOSTITZIN (Ibid., pag. 1801).

Dà sotto forma trigonometrica la soluzione di una equazione integro-differenziale.

R. SALEM (Ibid., pag. 1804).

Definisce due funzioni positive nelle vicinanze d'un punto (a destra ed a sinistra) dello stesso ordine di grandezza e scrive

$$f(x) \backsim g(x)$$

se nelle vicinanze di esso (il punto essendo escluso) è:

$$hg(x) < f(x) < kg(x)$$

h e k essendo numeri fissi e positivi.

Considera le due serie $\sum \frac{\operatorname{sen} nx}{\psi(n)}$ e $\sum \frac{\cos nx}{\psi(n)}$, $\psi(n)$ essendo positiva ed infinita con n e continua salvo $x = 0$, il concetto d'ordine permette di studiare l'ordine di queste serie e la loro integrabilità nel senso di RIEMANN e di LEBESGUE.

A. GHIKA (Ibid., pag. 1808).

Studia le funzioni a quadrato sommabile lungo dei contorni del loro campo di olomorfia.

R. TAMBS LYCHE (Ibid., pag. 1810).

Studia la convergenza della serie

$$\sum_0^\infty \frac{(s^x - 1)(s^x - 2) \dots (s^{x+\nu-1} - 1)}{(s-1)(s-2) \dots (s^\nu - 1)} z^\nu.$$

[1] « Arkiv. för Math. och Fysik », vol. 5 (1908).
[2] « Comptes Rendus », T. 185 (1927), pp. 1098, 1248.

G. VALIRON (Ibid., pag. 1815).

J. F. RITT (1) ha dato importanti generalizzazioni dei teoremi di LANDAU e SCHOTTKY; RITT fa uso, nella sua dimostrazione della funzione modulare: l'A. si limita al teorema di LANDAU e dimostra una proposizione contenente quella di RITT, utilizzando un teorema di BLOCH.

Milano, R. Università, giugno 1929.

GIUSEPPE BELARDINELLI

Recensioni delle Note di *Analisi* pubblicate nei « Comptes Rendus de l'Académie des Sciences » di Parigi. T. 187 (2° semestre 1928).

B. DE KERÉKJÀRTÓ (« Comptes Rendus », pag. 20).

Mediante il metodo dato in una sua nota precedente (2) deduce il seguente teorema enunciato da POINCARÉ e dimostrato da BIRKHOFF (3): « Se una trasformazione topologica d'una corona limitata da due circonferenze concentriche fa avanzare i punti sulla frontiera esterna nel senso positivo, e quelli della frontiera interna nel senso negativo, e se di più la trasformazione non ha punti invarianti, esiste un contorno c semplice la cui immagine, diretta od inversa, si trova nell'interno del contorno c ».

A. HAAR (Ibid., pag. 23).

Nella teoria classica delle equazioni alle derivate parziali del primo ordine, per la unicità delle soluzioni, si suppone che le soluzioni considerate siano derivabili due volte e soddisfino ad una equazione di LIPSCHITZ. L'A. può stabilire l'unicità delle soluzioni non supponendo che la continuità delle derivaie.

J. HADAMARD (Ibid., pag. 25).

Precisa la portata dei risultati precedenti della nota di HAAR.

DE POSSEL (Ibid., pag. 98).

Precedentemente (4) l'A. ha dimostrato che esiste un contorno Γ su una superficie di RIEMANN che la divide in due altre

(1) « American Journ. of Math. », 50 (1928), p. 73.
(2) « Comptes Rendus «, T. 186 (1928), p. 1699.
(3) « Acta Math. ». 47 (1925), p. 297.
(4) « Comptes Rendus ». T. 186 (1928), p. 1092.

superficie di cui una è equivalente ad un' area ad un solo foglio (schlichartig), dimostra nuovamente questo teorema basandosi sulla nozione di varietà di RIEMANN; studia inoltre le superficie di RIEMANN non continuabili.

H. L. SELBER (Ibid., pag. 100).

Mediante le nozioni dovute a NEVANLINNA (1) mostra che se due funzioni meromorfe $\varphi_1(z)$ e $\varphi_2(z)$, d'ordine finito, per $r=\infty$ sono legate da una relazione algebrica di genere 1 sono della forma

$$\varphi_1(z) = E_1[R(z) + \alpha \log z], \quad \varphi_2(z) = E_2(R(z) + \alpha \log z),$$

ove E_1 ed E_2 sono delle funzioni ellittiche.

R. TAMBS LYCHE (Ibid., pag. 102).

Sia $f(z)$ una funzione olomorfa attorno all'origine $z=0$, l'A. considera le sostituzioni $z_1 = f(z)$, avente l'origine quale punto doppio a moltiplicatore $s = e^{i\alpha}$ (α essendo reale, tra 0 e 2π, e $\alpha : 2\pi$ irrazionale), e studia, continuando i lavori di G. JULIA (2) ed H. CREMER (3) i casi in cui z è un centro per $f(z)$.

E. CARTAN (Ibid., pag. 196).

Studia gli invarianti topologici dello spazio rappresentativo d'un gruppo continuo semi-chiuso (4), e considera gli integrali multipli dei differenziali esatti definiti nello spazio. Dimostra che i due primi numeri di BETTI dello spazio sono nulli, mentre il terzo numero di BETTI non è mai nullo. Enuncia dei teoremi che, se dimostrati rigorosamente, permettono di ricondurre la determinazione dei numeri di BETTI di uno spazio semi-chiuso ad un problema algebrico.

S. MINETTI (Ibid., pag. 198).

Servendosi di una ineguaglianza di BLUMENTHAL dà un limite superiore del termine A che figura nella formula di LINDELÖF,

$$M(r) < e^{Ag(r)},$$

valida per una funzione intera di genere p, per

$$r_n > [n(\log n)^{\alpha_1}(\log^2 \alpha_1)^{\alpha_2} \dots (\log \alpha_v)^{\alpha v}]^{\frac{1}{\rho}},$$

(1) « Acta Math. », 46 (1925), pag. 1.
(2) « Journ. de Math. », 1 (1918), p. 237.
(3) « Math. Annalen », 98 (1927), p. 151.
(4) H. WEYL, « Math. Zeitschr. », 24 (1925), p. 380; E. CARTAN, « Annali di Mat. », 4 (1926), p. 211.

ove

$$g(r) = r^{\rho}(\log r)^{-\alpha_1}(\log^2 \alpha_1)^{-\alpha_2} \ldots (\log^{\nu} \alpha)^{-\alpha_\nu},$$

per $0 < p < \rho < p + 1$, mentre LINDELÖF aveva dato un valore preciso di A per $p = 0$ e $p = 1$.

A. FRODA (Ibid., pag. 274).

Stabilisce delle interessanti proposizioni per le funzioni uniformi di variabile reale, così: « il valore $f(v)$ della funzione $f(x)$ in un punto v è compreso tra i suoi limiti superiori ed inferiori di indeterminazione (¹) del limite $f(x)$ per $x = v$ salvo (al più) per una infinità numerabile di valori della variabile.

S. SAKS (Ibid., pag. 276).

Dà una dimostrazione valevole qualunque sia il numero delle 5imensioni del seguente teorema di MONTEL (²): « se una funzione sub-armonica è una funzione della funzione armonica u è una funzione convessa della variabile u ».

E. SLUTSKY (Ibid., pag. 370).

Sia dato un insieme di variabili eventuali x_n, la cui distribuzione delle probabilità dipende da un parametro h, l'A. studia un criterio di convergenza degli insiemi di valori eventuali.

S. MINETTI (Ibid., pag. 372).

LANDAU ha stabilito che la serie

$$\sum \frac{1}{r_n{}^{\rho+1}} \quad \text{e l'integrale} \quad \int_0^\infty \frac{M_r}{r^{\rho+r}}\, dr,$$

sono convergenti o divergenti nello stesso tempo; l'A. dimostra che

$$\sum \frac{1}{r_n{}^{\rho+1}} = (\rho + \varepsilon)^2 \int_0^\infty \frac{M_r}{r^{\rho+1+\varepsilon}}\, dr.$$

KRAWTCHOUK (Ibid., pag. 411).

Stabilisce che il procedimento d'integrazione di W. RITZ, per l'integrazione approssimata della equazione

$$y'' + A(x)y = f(x),$$

(¹) Vedasi, per la definizione di questi limiti, LEBESGUE, *Leçons sur les fonctions primitives*, 1904 (Cap. II).

(²) « Journ. de Math. », 7 (1928), p. 43.

converge ogni qualvolta la soluzione y è unica, senza imporre altre condizioni sulle funzioni A ed f oltre alla continuità.

C. LURQUIN (Ibid., pag. 475.

Dà delle formule relative al calcolo del valore medio e dello scarto medio usufruendo delle funzioni generatrici di frequenza.

M. BIERNACKI (Ibid., pag. 477).

G. PÓLYA ha mostrato [1] che se la funzione intera $\Sigma a_k x^{n_k}$, ove $\lim \frac{k}{n_k} = 0$, è d'ordine ∞, ogni semiretta uscente dall'origine è una retta di JULIA. L'A. stabilisce un teorema analogo:

Se $\lim\limits_{k=\infty} \frac{\log(n_{k+1} - n_k)}{\log n_{k+1}} > \frac{1}{2}$, ogni semiretta uscente dall'origine è una semiretta di JULIA per la funzione intera.

G. GIRAUD (Ibid., pagg. 498 e 632).

Continua le interessanti ricerche sul metodo di risoluzione del problema di DIRICHLET per le equazioni lineari ad un numero qualunque di variabili. I risultati trovano una applicazione per le equazioni non lineari e non analitiche.

Nella seconda Nota studia le equazioni non lineari alle derivate parziali di tipo ellittico, senza alcuna ipotesi di analiticità e mostra che la dimostrazione è più semplice di quella relativa alle equazioni analitiche.

J. CHOKHATE (Ibid., pag. 500).

Dà un metodo per le approssimazioni delle funzioni continue per mezzo di polinomi o di somme trigonometriche limitate, metodo che fornisce delle condizioni per la convergenza uniforme.

D. MENCHOFF (Ibid., pag. 502).

Studia la corrispondenza biunivoca diretta tra i punti di due dominî D e Ω situati nei piani delle variabili complesse z e w. Sulle funzioni continue che effettuano questa corrispondenza enuncia varie proposizioni. tra le quali: « Se quasi dappertutto avviene che tre raggi uscenti da un punto del piano z siano trasformati in tre curve a tangenti determinate che si intersecano nel piano w sotto lo stesso angolo. la rappresentazione è data da una funzione olomorfa ».

(1) « Comptes Rendus ». T. 184 (1927). p. 1526.

G. BOULIGAND (Ibid., pagg. 524 e 593).

Studia la nozione d'ordine della misura di un insieme che sostituisce alla locuzione d'ordine di dimensione che aveva impiegato precedentemente [1] e dimostra: « Se E è un insieme chiuso limitato nel piano euclideo, l'ordine di misura di E è $\leqq 2 - \alpha$, se $\rho^{-\alpha} f(\rho)$ è limitato (per $\rho \to 0$), $f(\rho)$ essendo la misura superficiale dell'insieme dei punti la cui distanza da E è $\leqq \rho$.

Questa nozione conduce in topologia ad una nuova concezione di dimensione di un insieme.

Nella seconda Nota definisce l'ordine di un insieme, non con il metodo di CANTOR-MINKOWSKI, ma in conformità della teoria moderna della misura, adottando il punto di vista di HAUSDORFF [2].

O. D. KELLOG (Ibid., pag. 526).

Appoggiandosi ad un lemma di VASILESCO, può stabilire un teorema di unicità per le funzioni armoniche date dai valori al contorno.

S. BERNSTEIN (Ibid., pag. 558).

Considera i polinomi monotoni di grado n nell'intervallo $(0, c)$, tali che $f(0) = 0$ ed $f(c) = 1$, e dà due espressioni asintotiche del massimo e del minimo di questi polinomi per $x = \alpha c$, $(\alpha < 1)$.

A. BUHL (Ibid., pag. 594).

MITTAG-LEFFLER ha creato la funzione $E_\alpha(y)$ [3], e mostra che questa funzione può essere applicata per lo studio della convergenza delle serie che verificano formalmente l'equazione della fisica-matematica

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial z}{\partial x};$$

l'A. mostra che per $\alpha \geq \frac{1}{2}$ $\varphi(y)$, $E_\alpha(y)$ assicura la convergenza della serie formale

$$\sum \frac{x^n}{n!} \varphi^{(n)}(y),$$

che verifica detta equazione differenziale. Per $\alpha = \frac{1}{2}$ la funzione $E_\alpha(y)$ si approssima all'integrale di GAUSS della teoria della probabilità.

(continua)

[1] « Comptes Rendus », T. 180 (1925), p. 245.

[2] « Math. Annalen », 79 (1918), p. 157.

[3] A. BUHL, *Séries Analytiques*, « Mémorial des Sc. Math. », (VII), 1925.