UMI

Sunti di lavori italiani

* Lavori di: Enea Bortolotti, A. M. Bedarida, G. Belardinelli, Angelina Cabras

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.1, p. 26–31.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_1_26_0>

SUNTI DI LAVORI ITALIANI

ENEA BORTOLOTTI: *Sulla geometria delle varietà a connessione affine. Teoria invariantiva delle trasformazioni che conservano il parallelismo.*

La parte I di questa Memoria (in corso di pubblicazione negli « Annali di Matematica ») è dedicata alla teoria generale delle connessioni affini *asimmetriche* (per le quali cioè non sussiste la cosidetta « condizione di commutabilità »). Osserverò, a proposito, che, mentre molte delle ricerche precedenti (particolarmente, di quelle della Scuola americana) si limitavano al caso *simmetrico*, nelle recenti ricerche di CARTAN e SCHOUTEN sulla geometria dei gruppi di trasformazioni e in quelle di EINSTEIN sulla teoria unitaria del campo elettromagnetico e gravitazionale interviene invece in modo essenziale appunto l'ipotesi dell'*asimmetria*, cioè, secondo CARTAN, l'esistenza di una *torsione* nella varietà considerata.

I principali contributi da me portati allo studio di queste varietà consistono anzitutto in *interpretazioni geometriche* del *tensore di torsione* $S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\lambda}$, del « vettore di EINSTEIN » $\Phi_\mu = S_{\mu\nu}^{\cdot\cdot\nu}$, e di altri tensori, ottenute mediante l'introduzione della « *connessione coniugata* » (di parametri $\Gamma_{\nu\mu}^{\lambda}$) e della « *connessione simmetrica associata* » (di parametri $\frac{1}{2}(\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} + \Gamma_{\nu\mu}^{\lambda})$) a una data (di parametri $\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda}$). Ho dato inoltre una trattazione completa del problema dell'*equivalenza* per due connessioni asimmetriche, e ho esteso a queste le nozioni di *coordinate* (affini) *normali*, di *tensori normali*, di *estensioni* di un tensore: il che permette, tra l'altro, di dare forme particolarmente semplici ai *teoremi di riduzione* e *di sostituzione* per la teoria degli invarianti differenziali della connessione in parola. Noterò ancora una classe particolarmente interessante e finora non osservata di spazi a connessione affine asimmetrica che si presenta nelle precedenti ricerche: gli spazi *a connessione affine omogenea*, o *a secondo tensore normale nullo*, di cui ho dato caratterizzazioni geometriche e una effettiva costruzione molto semplice.

La parte II della Memoria sviluppa e risolve in modo completo la questione delle *trasformazioni* (T_p) *delle connessioni affini asimmetriche che conservano il parallelismo.* Riprendendo e utilizzando anche i pochi risultati già noti (Friesecke, J. M. Thomas, Eisenhart) ottengo anzitutto questo risultato, nuovo e fondamentale per la teoria: che *esiste, fra le* (T_p)-*trasformate di una data connessione affine asimmetrica, una connessione particolare intrinsecamente legata a quella data* (e da essa univocamente determinata) *e invariante per le trasformazioni* T_p *di quella: gli invarianti differenziali della connessione data per le* T_p *sono tutti e soli gli invarianti differenziali della connessione* (T_p)-*invariante.*

Applicando questo teorema e i risultati ottenuti nella parte I io sviluppo abbastanza ampiamente lo studio di tali invarianti differenziali, dando teoremi generali di riduzione e di sostituzione, risolvendo il problema della (T_p)-equivalenza, soffermandomi poi particolarmente sugli invarianti differenziali degli ordini 1 e 2 (tra i quali si ritrovano naturalmente anche alcuni invarianti già noti, che non appaiono però i più interessanti), e dando svariate interpretazioni geometriche.

Infine mi occupo brevemente di una sottoclasse delle trasformazioni T_p: quelle (T_{pc}) *che conservano il parallelismo e la curvatura,* e di casi più particolari (trasformazioni T_{pc} delle varietà a curvatura nulla e degli spazi di gruppo), che hanno però interessanti relazioni con le recenti ricerche relativistiche e la teoria dei gruppi di trasformazioni.

A. M. Bedarida: *Ricerche sopra la teoria degli ideali di un corpo algebrico finito.* (Relazione di alcune ricerche in corso, esposte al Congresso della Società italiana per il Progresso delle Scienze di Firenze).

Le ricerche sopra gli ideali di un corpo algebrico finito si possono dividere in due gruppi aventi caratteri distinti.

In un primo gruppo si possono assegnare tutte quelle ricerche che estendono agli ideali le proposizioni dell' ordinaria Aritmetica. E questo è un campo che ormai non offre più alcuna ricerca, poichè ogni proposizione dell' Aritmetica razionale è stata estesa agli ideali. E così si è potuto stabilire, nei corpi algebrici finiti, un' Aritmetica identica a quella ordinaria.

In ciò risiede appunto, in modo speciale, la grande importanza della mirabile creazione di Kummer e di Dedekind.

In un secondo gruppo si possono assegnare tutte quelle ricerche che non sono estensioni di proposizioni dell'ordinaria Aritmetica. Queste hanno profondamente del nuovo ed offrono sempre campo a nuovi studi.

Io mi permetterò qui di parlare, molto brevemente, di alcune mie ricerche sopra agli ideali di un corpo algebrico finito, ricerche che naturalmente appartengono a questo secondo gruppo.

Questi miei studi hanno due indirizzi diversi: uno aritmetico puro, l'altro aritmetico analitico.

Il primo indirizzo riguarda un nuovo metodo che conduce a scoprire nuove proprietà relative agli ideali di un corpo algebrico finito. Nella sua forma generale, tale metodo consiste nella considerazione simultanea di una funzione aritmetica del corpo razionale $K(1)$ (sotto corpo di ogni corpo algebrico) e della sua generalizzazione agli ideali di $K(\theta)$ e l'esame di relazioni tra le due funzioni aritmetiche per opportuni valori delle variabili. In sostanza, per tale metodo, si può dire che, ad una funzione aritmetica del corpo razionale viene, in generale, a corrispondere un gruppo di proprietà relative agli ideali di un dato corpo algebrico $K(\theta)$. E il metodo è fecondo di risultati, come si vedrà in varî gruppi di lavori.

Intanto, in quattro Note dei « Rendiconti dell'Accademia dei Lincei », ho considerato la funzione $\varphi(n)$ di Eulero e la funzione $f(n)$ che offre il numero dei divisori razionali di un intero razionale n. Noterò, in particolare, che sono sorte nuove ed interessanti proposizioni relative agli ideali primari assoluti, cioè di quegli ideali in cui la norma è il più piccolo intero razionale contenuto negli ideali. Questi ideali sono stati considerati per la prima volta dal Bianchi.

Gli studi del secondo indirizzo riguardano la infinità degli ideali primi di un corpo algebrico finito. È noto che gli ideali primi sono, in ogni corpo algebrico finito, in numero infinito. È noto che gli ideali primi si distinguono per il loro grado, che è quell'esponente f, intero e positivo, che occorre dare al suo numero primo coordinato per avere la norma dell'ideale stesso e questo grado è sempre compreso tra 1 ed n, essendo n il grado del corpo. È noto, inoltre, che gli ideali primi di primo grado esistono sempre e sono in numero infinito. Di questa proposizione abbiamo due dimostrazioni: una aritmetico-analitica, che si basa sopra la $\zeta_k(s)$ di Dedekind; l'altra di Aritmetica pura dovuta al Bianchi, che si basa sopra le sue proposizioni intorno agli ideali primari assoluti.

Ma, per quanto riguarda gli ideali primi di grado superiore, non mi risulta che si sappia: se esistono qualunque sia il grado f, e quando esistono ideali primi di un determinato grado, se siano questi in numero finito od infinito. Per i corpi alle radici primitive di ordine q^r (q primo) si è veduto che, per ogni grado possibile esistono sempre infiniti ideali primi; e, la questione viene a dipendere dall'infinità dei numeri primi di determinate proporzioni aritmetiche. Altrettanto si può dire per i corpi quadratici, come ho fatto vedere in una mia Nota. Ma per quanto riguarda il caso generale non posso ancora dire di avere risoluto in modo completo la questione. Credo tuttavia di potere presto comunicare i risultati definitivi sopra questa ricerca, che, indubbiamente, è un punto importante della teoria degli ideali [1].

Settembre 1929 (VII).

G. BELARDINELLI: *Le trasformazioni dello spazio rigato che caratterizzano nell'infinitesimo una coppia di funzioni analitiche di due variabili* (in corso di stampa nei « Rendiconti del R. Istituto Lombardo »).

In questo lavoro l'A., deponendo le variabili complesse z_1, z_2 su due piani-complessi π_1, π_2 paralleli e posti all'unità di distanza, considera le rette congiungenti i punti P_1, P_2, indici di z_1, z_2 quali enti rappresentativi delle coppie z_1, z_2, ed ottiene così uno spazio rigato che indica con S.

Nello studio delle funzioni di una variabile complessa, tra le funzioni più semplici, si studiano le sostituzioni lineari:

$$z' = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta},$$

che hanno la proprietà *caratteristica* di trasformare cerchi in cerchi.

Così, l'A. considera, per ragione di analogia, una coppia di sostituzioni bilineari:

$$z_1' = \frac{a_{11}z_1 + a_{12}z_2 + a_{13}}{a_{31}z_1 + a_{32}z_2 + a_{33}}, \quad z_2' = \frac{a_{21}z_1 + a_{22}z_2 + a_{23}}{a_{31}z_1 + a_{32}z_2 + a_{33}},$$

[1] Devo alla gentilezza del prof. E. LANDAU l'aver appreso che tali questioni sopra gli ideali primi di grado superiore si possono dedurre da risultati contenuti in una Memoria di ARTIN, in cui ha considerato una nuova categoria di serie L (« Hamburger Abhandlungen », 3, S. 89-108). Tuttavia, io pubblicherò i miei studi, che se ne discostano alquanto, pur rendendo la priorità dovuta al giovane e valoroso matematico dell'Università di Amburgo.

In una « Relazione Scientifica », che pubblicherò in questo « Bollettino », parlando delle moderne ricerche della *Teoria dei Numeri*, dirò di questo importante lavoro di ARTIN.

sostituzioni che danno una trasformazione Γ dello spazio S, e studia il modo di agire di questa Γ nello spazio S.

Dimostra inoltre che: « La trasformazione Γ trasforma paraboloidi rigati in paraboloidi rigati, ed iperboloidi rigati in iperboloidi rigati »: paraboloidi ed iperboloidi che non sono generali e che vengono studiati ed indicati con P ed I. Questa proprietà è interessante perchè è caratteristica per la Γ, e l'A. dimostra il teorema: « Ogni trasformazione (biunivoca, continua) fra spazi rigati che lascia fermi i sistemi di iperboloidi I e di paraboloidi P è immagine di una coppia di sostituzioni bilineari sulle due variabili z_1, z_2 ».

In particolare studia le sostituzioni bilineari intere e dà una caratterizzazione pure per queste, dando così una *caratterizzazione* geometrica infinitesimale di una coppia di funzioni analitiche di due variabili.

Milano, dicembre 1929 (VIII).

ANGELINA CABRAS: *Fenomeni transitori in un ponte di Wheatstone a costituzione complessa.* Riassunto di Comunicazione fatta al Congresso Internazionale dei Matematici. (Bologna, settembre 1928, Sezione III-A).

Si considera un ponte di WHEATSTONE i cui lati siano reti comunque composte di resistenze, induttanze e capacità e si vuol calcolare la corrente in una diagonale, quando fra gli estremi dell'altra diagonale agisce una differenza di potenziale che sia una funzione qualunque arbitrariamente data e generalmente non periodica del tempo.

La risoluzione si ottiene prendendo la formula risolutiva nel caso delle correnti continue e sostituendo in questa formula alle resistenze ordinarie le resistenze funzionali dei lati. Queste resistenze sono operatori funzionali che contengono il simbolo di derivazione $\Delta = \frac{d}{dt}$. Si ottiene il risultato sotto la forma:

$$I(t) = f(\Delta) V(t)$$

in cui

$$f(\Delta) = \frac{P(\Delta)}{Q(\Delta)} = \frac{BC - AD}{(A+C)(B+D)R + ABC + BCD + CDA + DAB}$$

dove A, B, C, D, R sono le resistenze funzionali dei lati e della diagonale in cui si vuol calcolare la corrente, espresse tutte quali funzioni razionali del simbolo Δ. Ne risulta che $f(\Delta)$ è un operatore espresso quale quoziente di due polinomi $P(\Delta)$ e $Q(\Delta)$.

La valutazione della formula dedotta si ottieue sotto questa forma:

$$I(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{+i\infty} d\omega \int_0^\infty \frac{P(\omega)}{Q(\omega)} e^{\omega\theta} V(t-\theta)\, d\theta\,.$$

L' integrale rispetto a ω viene ulteriormente calcolato mediante la teoria dei residui di CHAUCHY e si ottiene $I(t)$ nel caso generale espresso mediante una formula integro-differenziale con tre termini, in uno dei quali entra $V'(t)$, in un altro $V(t)$ direttamente, e nel terzo $V(t)$ sotto il vincolo di un integrale definito in cui il nucleo è una funzione esponenziale.

Si ricava poi sotto forma esplicita la forma della corrente dovuta ad una forza elettro-motrice impulsiva.

Infine, a titolo d'esempio, viene fatta applicazione a un caso particolare con valori numerici dati, e si mostra come venga ricavata $I(t)$ in forma numerica effettiva.