UMI

Recensioni

* Ed. Landau: Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie
* G. Giorgi: Che cos'è l'elettricità?
* G. Vitali: Geometria nello spazio hilbertiano
* C. Burali-Forti e R. Marcolongo: Analisi vettoriale generale e Applicazioni

Bollettino dell'Unione Matematica Italiana, Serie 1, Vol. **9** (1930), n.1, p. 38–50.

Unione Matematica Italiana

<http://www.bdim.eu/item?id=BUMI_1930_1_9_1_38_0>

RECENSIONI

ED. LANDAU: *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie.* Zweite Auflage. Berlin, J. Springer, 1929, pag. 122.

Della prima edizione di questa opera, tenue di mole ma densa di ricco ed importante contenuto, il « Bollettino dell'U. M. I. » ha dato largo conto nel suo primo volume (pag. 25-32, 1922). Di questa nuova edizione non può che ripetersi il favorevole giudizio già espresso sulla precedente, e ci si può limitare ad indicare alcune delle notevoli aggiunte o modificazioni che si riscontrano nella presente.

In linea generale, si può dire che il titolo dell'opera, che annunzia l'esposizione di *nuovi* risultati nella Teoria delle funzioni, non mente, poichè la quarta parte, all'incirca, dei lavori citati, è di data posteriore alla pubblicazione della prima edizione. Venendo poi a qualche particolare circa alle cose nuove ora aggiunte, citiamo dapprima il notevole teorema di FATOU, secondo cui una funzione $f(x)$ regolare e limitata per $|x| < r$ ammette il $\lim\limits_{\rho \to r} f(\rho e^{i\theta})$ per ogni valore dell'argomento θ, eccetto al più un insieme di misura nulla. Si hanno poi nuovi risultati, in buona parte dovuti all'Autore, circa la tendenza di una funzione, regolare in un cerchio, al tendere non radiale della variabile alla circonferenza; è quasi interamente rifatto l'importante Capitolo riferentesi al campo di ricerche iniziato dal Teorema di PICARD, e contenente i risultati di LANDAU notoriamente fondamentali, di SCHOTTKY e quelli più recenti di BLOCH; è però da notare che l'intera trattazione si ispira ora a concetti diversi di quelli della prima edizione, e del nuovo punto di vista dà un'idea la notevole proposizione di BLOCH, che se $f(x)$ è regolare per $|x| \leq 1$ ed è $|f'(0)| \geq 1$, la $f(x)$ prende, per $|x| < 1$, tutti i valori dell'interno di un certo cerchio il cui raggio è una costante universale. Infine, è ampliato e completato, giovandosi in parte di risultati di BIEBERBACH, l'ultimo Capitolo, in cui si tratta pure del delicato raggiungimento di limitazioni aventi pure carattere universale. Superfluo il dire che in ogni capitolo è costantemente visibile l'opera personale dell'Autore, intenta sia a perfezionare i metodi, sia a completare i risultati.

Concludendo, non esitiamo a dire che questo libro, così ricco di un contenuto mirabilmente elaborato, non può non trovare posto sul tavolo di lavoro di ogni cultore dell'analisi matematica.

s. p.

G. GIORGI: *Che cos'è l'elettricità?* « Collezione Omnia ». Edit. P. Cremonese. Roma, 1929.

Segnaliamo ai lettori del « Bollettino », specialmente ai giovani, questo pregevole volumetto, dove l'egregio A. espone in rapida sintesi l'evoluzione dei concetti intorno alla natura dell'elettricità da FRANKLIN (1751) ai giorni nostri. Son quasi due secoli di lavoro prodigioso, durante i quali dalla sola conoscenza dei fenomeni di elettrostatica per semplice strofinamento, che diedero lo spunto alla prima teoria dei fluidi elettrici, si è giunti a quella dei fenomeni atomici e della conseguente teoria dei quanta e della meccanica ondulatoria.

Il primo grande progresso dopo FRANKLIN fu fatto da VOLTA al principio del secolo decimonono, quando, con la memorabile scoperta della pila, attirò l'attenzione degli scienziati sull'elettricità dinamica. Vent'anni dopo OERSTED scoprì l'elettromagnetismo, in base al quale il fisico-matematico AMPÈRE creava la prima teoria elettrodinamica, con sì mirabile intuito, che certe sue concezioni si presentano oggi come verità dimostrate dai più riposti fenomeni atomici.

Cotesta teoria era nell'indirizzo newtoniano delle azioni a distanza, e fu perfezionata nel corso di molti anni da sommi matematici, come POISSON, LAPLACE, GREEN, GAUSS, HELMOLTZ, WEBER, KIRCHHOFF. Ma già questi ultimi avevano segnalato l'inconsistenza di cotesta dottrina, che si basava sopra una multiplicità di leggi fondamentali tra le quali non si vedeva alcun legame. Mancava d'una legge esprimente le azioni mutue fra cariche mobili comunque, e tale che per i corpi in quiete si riducesse alla legge di COULOMB, e per due correnti a quella di AMPÈRE. Gli sforzi dei tre grandi matematici dell'ultima metà del secolo passato, RIEMANN, C. NEUMANN e BETTI non valsero a colmare la grande lacuna.

Fu l'inglese FARADAY che con le sue mirabili scoperte e le sue geniali concezioni, frutto d'un finissimo senso fisico unito a una mentalità matematica (quantunque non fosse matematico), aprì la via a una nuova teoria più ampia e feconda. Fondamentale fra tutte, la sua nuova concezione dello spazio-fisico, che considerò non come il puro spazio dei géometri, o lo spazio pieno d'un ètere fluido materiale, ma come un *quid* vuoto di materia e tuttavia dotato delle proprietà d'un dielettrico.

L'opera di pensiero (non quella sperimentale) del FARADAY rimase infeconda fino al 1860, anno in cui C. MAXWELL, fisico, matematico e poeta, penetrando a fondo cotesto pensiero, cominciò a elaborare la famosa teoria, che poi fu esposta nel *Trattato d'elettricità e magnetismo.* Ben dice il prof. GIORGI: « Era necessaria quella triplice mentalità per scrivere pagine come quelle del « Trattato », per aprire il volo d'una fervida fantasia verso orizzonti così nuovi senza dimenticare il rigore matematico nelle complicate deduzioni, e conservando sempre per guida il senso della realtà fisica ».

Alle concezioni del FARADAY egli aggiunse la fondamentale ipotesi delle correnti dielettriche (o di spostamento) dotate delle stesse proprietà elettromagnetiche delle correnti di conduzione. Pervenne così a formulare quelle celebri equazioni differenziali che gli permisero di identificare le onde elettromagnetiche di elevata frequenza con le onde luminose. HAEVYSIDE portò più tardi la teoria maxwelliana alla sua maggior perfezione, ed HERTZ con la prova sperimentale dell'esistenza delle onde elettromagnetiche le assicurò il trionfo.

Una sola entità, scoperta da FARADAY, non aveva trovato posto nella teoria di MAXWELL: la molecola di elettricità, la cui esistenza si manifesta nei fenomeni elettrolitici. MAXWELL la considerava una concezione provvisoria, che sarebbe stata sostituita un giorno da un'altra aderente alla sua teoria. Ma non di questa opinione furono WEBER e STONEY in particolare; il quale in una memorabile Memoria del 1874 determinò la carica del corpuscolo di elettricità e gli diede il nome di elettrone.

Seguirono le celebri esperienze di CROOKES e di altri sulle scariche nei gas rarefatti, dalle quali l'esistenza dell'elettrone scaturiva sempre più chiara. Esse inspirarono a H. LORENTZ (1894) una nuova teoria dei fenomeni elettrici, magnetici e ottici nei corpi in moto, detta appunto teoria elettronica, giacchè tutto scaturisce dalla ipotesi che cotesti fenomeni son dovuti a elettroni mobili nell'etere immobile, unico mezzo dielettrico fondamentale. Essa rappresenta certamente un grande progresso su quella di MAXWELL, giacchè mentre si identifica con essa nel campo dei fenomeni macroscopici, rende anche conto di molti altri fenomeni della materia fra i più delicati e riposti.

Ma la concezione di Lorentz intorno all'ètere si trovò di fronte a una gravissima difficoltà dopo la famosa esperienza di Michelson e Morley, che dimostrò l'impossibilità di porre in evidenza il moto della terra rispetto a l'ètere, e venne a urtare contro i due concetti fondamentali della fisica, fino a quel tempo intangibili: lo spazio assoluto e il tempo assoluto.

Fu allora che Einstein (1905) con un tratto di genio ammise che quando si passa da una piattaforma di riferimento a un'altra in moto uniforme rispetto a quella, si alterano le misure di spazio e tempo con dipendenza mutua secondo certe trasformazioni dette *lorentziane*; fondando così la sua prima teoria della relatività, alla quale Minkowski diede poi una rappresentazione ipergeometrica di singolare perspicuità e bellezza.

L'ètere universale veniva in tal guisa a identificarsi con uno spazio-tempo tetradimensionale, in cui si comportano come assolute le linee orarie della propagazione della luce.

Più tardi nuove critiche ed esperimenti indussero a cercare un ampliamento di cotesta teoria, in guisa che, preso come caposaldo il fatto fino allora trascurato della identità delle due masse inerte e gravitazionale, le leggi della fisica venissero espresse nella stessa maniera rispetto a qualunque riferimento.

Il prof. Giorgi traccia in breve la storia di questo grande progresso dovuto pure ad Einstein, e fa una rapida e chiara sintesi di questa seconda teoria della relatività, mostrando come essa, anzichè negare l'esistenza dell'ètere, offre i dati principali della sua struttura.

In questi ultimi anni altri fenomeni son venuti ad arricchire la fisica e a fornirci nuove idee intorno alla struttura dell'atomo e agli scambi d'energia fra atomo ed ètere. Questi scambi avvengono per *quanti*, onde Einstein fece l'ardita ipotesi che ogni radiazione sia composta di granuli d'azione. Così accanto alla classica teoria ondulatoria sorse la nuova teoria quantistica, ciascuna adatta alla spiegazione d'un certo grnppo di fenomeni, ma nettamente distinte. Solo di recente sono stati fatti notevoli progressi per fondere insieme le due teorie, prima da De Broglie, poi da Heisenberg, Schrödinger ed altri; ma l'ultima parola non è stata ancor detta e forse ci si illude di essere molto vicini alla mèta.

Il prof. Giorgi dà un cenno di queste ricerche nell'ultimo capitolo, al quale segue, come conclusione generale, una ricapitolazione delle conoscenze acquisite e dei problemi che restano ancora insoluti.

p. b.

G. VITALI: *Geometria nello spazio hilbertiano.* Bologna, Zanichelli, pagg. VII-282).

Con questo volume il VITALI ha voluto coordinare e semplificare quel metodo funzionale di indagine al quale s'ispira quasi tutta la Sua produzione scientifica di questi ultimi anni. In questa rappresentazione funzionale, il punto è dato da una funzione reale a quadrato sommabile, e lo *spazio hilbertiano* o *spazio H* altro non è che l'insieme di tutte le funzioni di tale natura definite in uno stesso aggregato. Si comprende allora come l'esposizione della geometria di questo spazio richieda la conoscenza di una parte della teoria degli integrali di LEBESGUE, e di una parte della teoria degli sviluppi in serie di funzioni ortogonali.

Per dare maggiore autonomia al libro, l'A. ha voluto premettere un'esposizione di queste teorie ausiliarie. E poichè esse vengono introdotte in una nuova maniera, reputo opportuno darne brevemente un'idea. Alla semplicità — quale è consentita in argomenti così sottili — è unito qui il vantaggio di trattare alla stessa stregua *aggregati di punti misurabili* siano limitati o no, e funzioni limitate o no, per ciò che concerne la loro *sommabilità.*

Concetto di misura. — Sia g un aggregato di punti di una retta r, e si consideri un insieme B di un numero finito o di una infinità numerabile di tratti di r, a due a due distinti, e tali che ogni punto di g appartenga ad un tratto di B, o come punto interno, o come estremo. Il limite inferiore delle lunghezze di questi segmenti è l'*estensione* $E(g)$ dell'aggregato g. Preso uno di questi insieme B, vi saranno dei punti di questi segmenti che non appartengono a g: essi formeranno un aggregato g', che avrà la sua estensione $E(g')$. Il limite inferiore delle varie $E(g')$ forma l'*anomalia* $\alpha(g)$ dell'aggregato g. *Misurabile* è quell'aggregato g per cui $\alpha(g) = 0$, e la sua *misura* è allora $E(g)$. (Parte I. 1. 2, 3).

L'Integrale di LEBESGUE. — Una funzione f, generalmente definita in un aggregato misurabile g, si dice *quasi costante*, se generalmente acquista solo un numero finito o una infinità numerabile di valori finiti diversi, e se ogni aggregato in cui assume lo stesso valore è misurabile. Viene poi dato al solito modo il concetto di *sommabilità*, e quello di *integrale* di LEBESGUE delle funzioni quasi-costanti. Si definisce poi come *maggiorante* (*minorante*) di una funzione f misurabile in g, ogni funzione φ quasi-costante, per la quale è generalmente soddisfatta in g la disuguaglianza $\varphi \geq f$ ($\varphi \leq f$). Si prova poi, che se f ha una maggiorante ed una minorante sommabili in g, ne esistono infinite, e i loro integrali estesi a g formano due classi contigue: il loro numero di separazione è l'*integrale* di

LEBESGUE di f, e la funzione f si dice *sommabile* in g. (Parte, I, 5, 6, 7).

L' ***integrabilità completa per serie***, concetto già dato dal VITALI in precedenti ricerche viene qui trasformato in quello di ***successione completamente convergente***. Facendo inoltre uso del concetto di ***equi-assoluta-continuità***, riproduce in una nuova forma un suo teorema sull' integrazione per serie, e prendendo questi elementi come base, ricostruisce in poche pagine, e in modo brillante, le parti fondamentali della teoria degli sviluppi di funzioni ortogonali. (Parte II, 1. 2, 3, 4, 5).

Al Cap. 6° sono date le prime nozioni dello ***spazio hilbertiano*** o *spazio H*. Sembra superfluo riferire sugli argomenti qui svolti, avendo il VITALI, già nel febbraio 1928, dato un assetto definitivo a tutta questa teoria (1). Basti dire che, se $u_1, u_2, \dots u_n$ sono n variabili reali che variano in un certo campo U, e che ad ogni n-pla di valori delle u corrisponde un punto dello spazio H, questo si dirà una ***punto-funzione*** $f(t; u_1, u_2, \dots u_n)$, oppure $f(t; u)$. Col variare delle u nel campo U, la punto-funzione descrive ***una varietà*** dello spazio H, che sarà ad n dimensioni solo e soltanto quando le funzioni $f_i = \dfrac{\partial f}{\partial u_i}$ sono linearmente indipendenti. In tal caso la $f(t; u)$ si chiama una ***determinante*** della varietà. Avverto che l'Autore ha trascurato di proposito di riprodurre in questa Parte risultati di carattere proiettivo-differenziale, perchè si propone di esporre dei mezzi semplici per lo studio della *Geometria proiettiva* dello spazio hilbertiano.

Sempre per dare maggior autonomia al libro, nella Parte III si trattano alcune quistioni algebriche. Il valore dei determinanti di SPOTTISWOODE, KRONECKER, BRILL–SCHOLTZ–HUNYADY è qui ottenuto con rara eleganza.

Cospicuo contributo porta l'A. allo studio delle ***equazioni secolari***, tali essendo anche quelle nelle quali una quadrica è generica, e l' altra è *semidefinita*. Prova che pure in tal caso le radici sono tutte reali, e le radici finite hanno il loro ordine di moltiplicità uguale al rango, mentre per quelle (eventuali) infinite l' ordine di moltiplicità non supera il doppio del loro rango.

La Parte IV è dedicata al *calcolo differenziale assoluto*. Una bella Memoria (2) del prof. PASCAL ha suggerito al VITALI nel 1923

(1) G. VITALI, *Geometria nello spazio hilbertiano*. [« Atti del R. Istituto Veneto, Tomo LXXXVII, Parte seconda (1928)].

(2) E. PASCAL, *La teoria delle forme differenziali di qualunque ordine e grado*. [« Memorie R. Acc. Lincei (1910)].

un'altra (1), dove è sviluppato un Calcolo assoluto, da Lui chiamato allora generalizzato, che in molti punti procede come quello di RICCI, che ne è un caso particolare. Con l'aggiunta di nuovi concetti trovati dal VITALI in questi ultimi tempi, con la introduzione di felici convenzioni e notazioni, questo Calcolo viene a possedere nella attuale esposizione tutta l'agilità del Calcolo di RICCI, cosicchè l'Autore ha potuto, relativamente in poche pagine, sviluppare con limpida chiarezza tutti gli algoritmi. Cercherò darne un cenno.

Gli indici o gli apici variano in quelli aggruppamenti che sono offerti dalle *combinazioni con ripetizione* di qualunque classe dei numeri 1, 2, 3, ... n. L'insieme di queste combinazioni forma il *campo* Ω. Ognuna di queste viene considerata come un tutto, e indicata con una sola lettera: essa costituisce uno *stato* dell'indice o apice variabile $\varkappa$ che si considera; i numeri che in essa figurano sono le *cifre* dello stato, il cui numero ne forma il *rango* $\rho_\varkappa$. L'apice o indice $\varkappa$ *varia nella classe* (ν, μ) tutte le volte che percorre tutti e soli quelli stati per cui $\nu \geq \rho_\varkappa \geq \mu$. Ha particolare interesse la classe $(\nu, 1)$, che si chiama la *classe* ν, e si dice che è una *classe intera*. Sia ora

$$u_i = \varphi_i(v_1, v_2 \dots v_n) \tag{1}$$

una sostituzione invertibile di variabili indipendenti, e $I[u]$ un invariante delle u: si fissi uno stato $\varkappa_0$ di un indice variabile $\varkappa$ in un campo Ω le cui cifre siano $i_1, i_2, \dots i_k$, e si ponga:

$$I_{\varkappa_0}[u] = \frac{\partial^k I[u]}{\partial u_{i_1}\, \partial u_{i_2} \dots \partial u_{i_k}}. \tag{2}$$

Si ottiene così un sistema di funzioni $I_\varkappa[u]$. Come variano queste funzioni nel passaggio dalle u alle v? Se Ω è costituito dalle sole combinazioni di prima classe, la legge di trasformazione è ben nota. Il VITALI prova che *qualunque* sia lo stato di un indice $\varkappa$ variabile in Ω, questa legge *formalmente* si conserva, cioè che si può sempre scrivere

$$I_\varkappa[v] = \Sigma_\beta I_\beta[u] \frac{\partial u_\beta}{\partial v_\varkappa}, \tag{3}$$

dove la Σ è estesa a tutti gli stati dell'indice β variante in Ω, e dove le $\frac{\partial u_\beta}{\partial v_\varkappa}$ *sono funzioni intere di derivate semplici o multiple delle* **u** *rispetto alle* v. Ciò posto, i *sistemi assoluti* del VITALI sono quei sistemi i cui indici e apici possono variare in qualunque classe,

(1) G. VITALI, *I fondamenti del Calcolo assoluto generalizzato*. [« Giornale di matematiche del BATTAGLINI, Vol. LXI (1923)].

che per qualunque sostituzione (1) seguono la legge di trasformazione dei sistemi misti del Calcolo di RICCI, sostituendo alle derivate effettive delle u rispetto alle v che figurano in questi, le $\frac{\partial u_\beta}{\partial v_\alpha}$ testè definite. (Parte IV, 1, 2, 3, 4).

Negli altri capitoli vengono estesi al nuovo Calcolo i noti algoritmi del calcolo di RICCI, definiti due sistemi assoluti, che fanno riscontro ai sistemi δ^s_r, ε di questo Calcolo (Parte IV, 5), e dati due criteri di pratica applicazione per riconoscere i sistemi assoluti.

Quando il VITALI fece nel 1923 la prima esposizione del Suo Calcolo, non era ancora in possesso dell' importante operazione di *derivazione covariante.* Egli trovò questa operazione nel 1927, e la comunicò alla R. Accademia dei Lincei ([1]). Sia $f(t; u)$ una determinante di una varietà dello spazio hilbertiano, e si ponga:

$$(4) \qquad a_{\alpha,\beta} = \int_g f_\alpha f_\beta \, dt,$$

con α, β varianti nella stessa classe, e dove f_α indica una derivata della f già precisata in precedenza per un generico invariante $I[u]$. *A base della derivazione covariante* del VITALI, *sta il sistema assoluto* $a_{\alpha,\beta}$. Con questa derivazione, si passa da un sistema assoluto con indici o apici variabili in classe intere, ad un altro sistema assoluto che ha gli indici e gli apici del precedente, *più un indice di covarianza di prima classe.* (Parte IV, 8).

In particolare da questa operazione scaturiscono dei sistemi assoluti di $\nu + 1$ indici di prima classe, e che quindi rientrano nei confini del calcolo assoluto ordinario. In omaggio al RICCI, l'Autore li ha chiamati *ricciani* di ordine $\nu + 1$. Essi si costruiscono partendo dal sistema $I_\alpha[u]$, con α di classe ν, e derivandolo una volta covariantemente: ne risulta un sistema a due indici $\underset{\nu}{I_{\alpha,p}}$, di cui il primo di classe ν, il secondo di prima classe, che ha nulli tutti gli elementi in cui $\rho_\alpha < \nu$. Se $\rho_\alpha = \nu$, e se $i_1, i_2, \dots i_\nu$ sono le cifre di α, si ha $\underset{\nu}{I_{\alpha,p}} = I_{i_1, i_2, \dots i_p}$: questo è il $\nu + 1$-*esimo ricciano.* (Parte IV. 12).

Tralasciando di parlare degli altri argomenti contenuti in questa Parte, quali ad esempio l'introduzione dei *simboli* di RIEMANN, la dimostrazione delle *identità* del BIANCHI ecc., vengo a dare un cenno della Geometria differenziale esposta nella Parte V.

([1]) G. VITALI, *Sopra una derivazione covariante nel Calcolo assoluto generalizzato.* (« Rend. Acc. dei Lincei, vol. VI, serie 6ª, 1927); *Sulle derivazioni covarianti nel Calcolo assoluto generalizzato.* (« Idem, [vol. VII, serie 6ª, 1928).

Se $f(t; u)$ è una determinante d'una varietà V_n dello spazio H, le f_α (con α variabile nella classe ν) interpretate come parametri di direzione in un punto P di V_n, individuano uno spazio euclideo il cui numero di dimensioni non supera $\binom{n+\nu}{n} - 1$. È questo *lo spazio* σ_ν relativo al punto P, mentre lo *spazio principale* $\Pi_{\nu+1}$ dello spazio $\sigma_{\nu+1}$ (quando esiste), viene individuato dagli elementi del $\nu+1$-*esimo* ricciano della funzione $f(t; u)$ (Parte V, 1).

Nei numeri 2, 3, sono studiate dal punto di vista differenziale le curve dello spazio H, e quelle che sono situate in una varietà di questo spazio; in particolare le geodetiche e le assintotiche. Nel capitolo 4° s'inizia lo studio delle varietà. Se il Π_2 di questa ha ν dimensioni, e se $\underset{i}{X}$ sono ν parametri normali due a due ortogonali situati nel Π_2, si introducono i ν sistemi covarianti a due indici di prima classe:

$$\underset{i}{x}_{r,s} = \int_g \underset{i}{X} f_{r,s} dt, \tag{5}$$

($f_{r,s}$ derivate covarianti doppie della determinante $f(t; u)$ della varietà).

Questi sono linearmente indipendenti: possono invece essere linearmente dipendenti i $\nu+1$ sistemi $\underset{i}{x}_{r,s}$ e $a_{r,s}$ ($a_{r,s}$ coefficienti della forma quadratica che dà il quadrato dell'elemento lineare della varietà). Ha luogo allora il bel teorema: i *centri di 1ª curvatura delle geodetiche spiccate da un punto della varietà, sono situati sopra un' ipersfera di* Π_2 *passante per questo punto.* Si prendono poi in esame le *varietà minime*, per le quali si prova che un certo invariante è nullo: questa unica condizione riassume le equazioni (in numero infinito) di EULERO-LAGRANGE che sono necessarie per l'esistenza del minimo. Lo studio delle *curvature delle varietà* è fatto nel capitolo 7°. La *curvatura totale* d'una V_n è data in questo modo. Siano α, β due indici che percorrono tutte le combinazioni semplici di seconda classe dei numeri $1, 2, \ldots n$: chiamate h, k le cifre di α, e p, q quelle di β, si ponga:

$$R_{\alpha,\beta} = (h, k; p, q), \qquad h < k;\ p < q$$

$$E_{\alpha,\beta} = a_{h,p}\, a_{k,q} - a_{h,q}\, a_{k,p},$$

e si chiami R, E rispettivamente i determinanti che hanno per elementi $R_{\alpha,\beta}$, $E_{\alpha,\beta}$ costruiti in modo che in ogni riga sia costante l'indice α, e in ogni colonna l'indice β, e che in ogni termine della diagonale principale sia $\alpha = \beta$. Allora prova il VITALI che il rapporto $\frac{R}{E}$ è un invariante, e a questo Egli dà il nome di *curvatura totale* di V_n nel punto che si considera. Per $n=2$ questo rapporto coincide con l'invariante di GAUSS. Si definisce poi la *curvatura di* V_n *in* P *secondo un* S_r *di* σ_1, come la curvatura totale della *varietà geodetica di* V_n *tangente in* P *ad* S_r. Per $n=3$ si hanno le tre *curvature principali*, e si ha il risultato che il *loro prodotto è uguale alla curvatura totale di* V_3 *testè definita*. Finalmente le *curvature principali* delle ordinarie ipersuficie, trovano qui le loro analoghe in quelle varietà V_n che hanno il Π_2 di dimensioni uno, e si trova che in tal caso la *curvatura totale della* V_n *è uguale alla potenza* n-1^{esima} *del prodotto delle* n *curvature principali*.

Nel capitolo 8° è dato il concetto di *sistema principale di normali ad una varietà giacente nel suo* Π_2, ed esposto un modo di determinazione. Per le superficie questi sistemi erano già stati studiati con dettaglio in una Nota [1] dell'Autore del 1928: qui sono estesi a tutte le varietà. Ecco brevemente la definizione. Se ν è il numero delle dimensioni del Π_2 di una varietà V_n, il VITALI costruisce un sistema contravariante $W^{r,s;p,q}$ a quattro apici di classe 1 a mezzo dei coefficienti della forma che dà il ds^2 di V_n $(r, s, p, q = 1, 2, \dots n)$. Avendo $\underset{i}{x_{r,s}}$ il significato dato dalle (5), si ponga:

$$\underset{i}{x^{r,s}} = \sum_{1}^{n}{}_{pq} W^{r,s;p,q} \underset{i}{x_{p,q}}$$

$$\left(\underset{i}{x}, \underset{j}{x}\right) = \sum_{1}^{n}{}_{rs} \underset{i}{x_{r,s}} \underset{j}{x^{r,s}}, \qquad (i, j = 1, 2, \dots \nu).$$

È *principale* quel sistema di normali per cui

$$\left(\underset{i}{x}, \underset{j}{x}\right) = 0$$

per ogni coppia *ij* di numeri diversi scelti fra i numeri 1, 2,... ν. Ha luogo il seguente teorema:

In ogni punto di V_n *esistono uno o infiniti* (*punto ciclico*) *sistemi principali di normali nel* Π_2.

Nel capitolo successivo si studiano con dettaglio i sistemi principali delle superficie, e si danno esempi di *superficie cicliche* col Π_2 a tre e a due dimensioni.

[1] G. VITALI, *Sopra alcuni covarianti associati ad una varietà e sopra i sistemi principali di normali delle superficie*. (« Annales de la Société polonnaise de mathématique », T. VII (1928).

Infine, nell'ultimo capitolo, si osserva che questi sistemi rispondono ad una definizione simmetrica rispetto all'insieme delle loro normali, e si mostra come sia possibile in altre maniere arrivare a tali sistemi.

Ed ora un'idea generale dell'opera.

L'esposizione è chiara, attraente, suggestiva; gli argomenti trattati sono di alta portata e di carattere originale. Anche quelli già noti, personali vedute li pongono in nuova luce. Le conclusioni, pure nel groviglio delle formule, sono sempre raggiunte nel modo più rapido con sapiente maestria. Raccomandare pertanto questo libro agli studiosi mi sembra superfluo, tanto parla a suo favore l'alta rinomanza dell'Autore. A. TONOLO

Padova, 30 dicembre 1929.

C. BURALI-FORTI e R. MARCOLONGO: *Analisi vettoriale generale e Applicazioni*. Vol. I: *Trasformazioni lineari*. (Bologna, N. Zanichelli, 1929, pp. 265-III).

Questo volume è il primo ed il fondamentale di una serie avente lo scopo di trattare in « *modo assoluto* », cioè *indipendentemente da ogni sistema di riferimento tutte le questioni geometriche-fisico-matematiche*. In esso viene sviluppata l'analisi vettoriale ed omografica finita e differenziale che viene ivi subito impiegata per stabilire le basi analitiche delle suddette applicazioni. Queste, a cura degli Autori stessi in collaborazione con i proff. BURGATTI e BOGGIO, verranno esposte in altri quattro volumi che rispettivamente tratteranno: *I fondamenti di Geometria differenziale* (compresa la *Geometria proiettiva-differenziale*), la *Teoria matematica dell'elasticità*, l'*Idrodinamica* e l'*Elettricità e magnetismo*.

La lettura del libro in esame richiede la conoscenza degli elementi di calcolo vettoriale che debbono essere a tutti famigliari giacchè fanno parte della introduzione ad ogni corso universitario di Meccanica razionale o di Fisica-matematica. Detti elementi poi cominciano ad avere maggior diffusione anche nei trattati di Geometria analitica (v. per es. quello recentissimo del prof. COMESSATTI). Il nostro libro, che rivela carattere prevalentemente scientifico, incomincia con una *Introduzione* che sviluppa in modo *del tutto generale* i concetti di uguaglianza, identità, corrispondenza, operatori, sistemi di operazioni lineari, funzioni, limiti, derivate, integrali. Questa materia, per la sua grande astrazione, e che dimostra la cura posta dagli Autori per dare all'Analisi vettoriale un fondamento rigoroso, richiede nel lettore qualche speciale attenzione, ben presto compensata dalla facilità con cui si leggono i capitoli successivi.

Nel primo capitolo in modo assai elegante viene sviluppata la teoria delle *omografie* e relativi operatori fondamentali nello spazio S_3 (1). Già in questa prima parte si nota che la grandissima competenza degli Autori, frutto di molti anni di costante lavoro, non disgiunto da lotte sostenute con molta fede, fa ancora loro seguire per lo sviluppo dell'analisi vettoriale, quei criteri, che dovrebbero sfatare l'erronea credenza che detta analisi vettoriale rappresenti un semplice tachigrafo delle coordinate. Per semplificare l'esposizione dell'analisi vettoriale differenziale che segue nel II Cap., il Cap. I, termina con lo studio delle *iperomografie od omografie del 2° ordine*, operazioni fra vettori ed omografie od anche fra coppie di vettori e vettori.

Ciò, oltre ad uno sviluppo più sistematico ed ampio, costituiscono in questo libro caratteri differenziatori dal primo volume della precedente *Analyse vectorielle générale* apparso per cura degli stessi Autori nel 1913.

Nel capitolo II si espone l'*Analisi differenziale* trattando precisamente delle *derivate rispetto ad un punto* di punti, vettori, omografie, sviluppando le proprietà dell'operatore differenziale del primo ordine leibniziano $\frac{d}{dP}$ *(derivata rispetto ad un punto)*, che a rigore sarebbe l'*unico* indispensabile. Per la loro grande utilità vengono invece anche studiati sistematicamente gli altri operatori differenziali del 1° ordine: *div*, *rot*, *grad*, *Rot*.

L'uso delle iperomografie agevola precisamente lo studio degli ultimi due, ma viene messo in evidenza l'inopportunità di un uso sistematico di esse. Segue la teoria degli operatori differenziali del secondo ordine: Δ e Δ'; il Δ operante fra omografie ed omografie ed il Δ' fra vettori e vettori, senza essere omografia. Essi dipendono dall'operatore fondamentale leibniziano $\frac{d^2}{dP^2}$ (derivata seconda rispetto ad un punto) e per ottenerne una naturale definizione si accenna a poche nozioni sulle *omografie del 3° ordine*, che nel contempo riescono comode per stabilire la relazione fondamentale esistente fra essi. Degli operatori Δ e Δ' vengono riportate anche quelle possibili altre definizioni che si dimostrarono comode nelle applicazioni e che consistono in prodotti funzionali di operatori del 1° ordine. Con le stesso criterio si ricavano particolari operatori utili, del 3° e del 4° ordine.

(1) Circa l'S_n vi sarà un Capitolo nel 2° volume della Collezione citata.

Sviluppando i concetti che furono introdotti nel 1917 dal prof. BURGATTI, gli operatori div, rot, grad, Rot, Δ e Δ' vengono adottati ad operare anche su enti di una superficie. Questi *operatori superficiali* si sono dimostrati di una efficacia grandissima, tanto nello studio delle questioni geometriche quanto in quelle fisiche. Nel libro in esame non mancano riferimenti alle ordinarie « *forme cartesiane* » e fra queste le espressioni assolute dei notissimi determinanti Hessiano e Jacobiano.

Come immediata applicazione del calcolo assoluto svolto nei precedenti due capitoli, nel terzo capitolo si sviluppa in modo celere l'importantissima analisi matematica che è fondamentale per la fisico-matematica. Così fra l'altro troviamo le ben note proposizioni che trasformano integrali estesi a volumi in integrali estesi alle superficie contorno, integrali estesi ad una linea chiusa in integrali superficiali estesi a diaframmi limitati da quella linea. Dopo una interessante teoria dei *differenziali esatti*, seguono i fondamenti sulle *superficie e linee vorticose e di corrente* ed importanti teoremi analitici del JACOBI. Con molta concisione e chiarezza sonvi i teoremi differenziali caratterizzanti la natura di particolari campi vettoriali seguiti dal teorema generale di CLEBSCH e sue conseguenze.

Infine troviamo una breve ma densa teoria delle *equazioni differenziali* dipendenti nel modo più semplice dagli operatori differenziali div, rot, grad, Rot e $\dfrac{d}{dP}$.

Gli Autori, mentre espongono questo metodo analitico assoluto, muovono una corrispondente critica ai comuni metodi cartesiani e a quelli pseudo-assoluti, con il plausibile scopo di mettere maggiormente in rilievo gli incontestabili suoi pregi. Io credo che codesto metodo vettoriale, sotto *molti punti di vista* rappresenta un *reale progresso scientifico*. Ed è con qualche orgoglio che i proff. BURALI-FORTI e MARCOLONGO possono vantarsi di aver dato ad esso, tanto contributo nei molti anni delle loro fatiche, e ad essi i lettori non dominati da vecchi preconcetti, con lo studio di quest'opera e quelle che seguiranno, apprendendo la forma più perfezionata dello sviluppo e dell'uso del metodo vettoriale, dovranno la loro gratitudine. *m. m.*